Matematik Chalmers

Tentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, 1999–08–25

Telefon: Stig Larsson, 772 35 43

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

---

1. (10 p) Funktionen f är periodisk med period 6 och $f(t) = 1$ för $|t| \le 1$, $f(t) = 0$ för $1 < |t| \le 3$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Rita amplitudspektrum (de första 7 termerna räcker).

2. (10 p) Bestäm lokala maxima och minima för funktionen $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x$.

3. (15 p) Balansekvationerna för massa Vc `[mol]` och värmeenergi $\rho c_p VT$ `[J]` för en tankreaktor är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Vc) &= q(c_f - c) - Vck_0 \exp(-E/(RT)), \\ \frac{d}{dt}(\rho c_p VT) &= \rho c_p q(T_f - T) + (-\Delta H)Vck_0 \exp(-E/(RT)) - \kappa A(T - T_K). \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Inför nya variabler $X_1 = (c_f - c)/c_f$ (omsättningsgraden), $X_2 = (T - T_f)/T_f$, $U_1 = q/q_f$, $U_2 = (T_K - T_f)/T_f$, där c_f, T_f, q_f är (lämpligt valda) konstanter. Visa hur systemet (1) kan skrivas på dimensionslös form

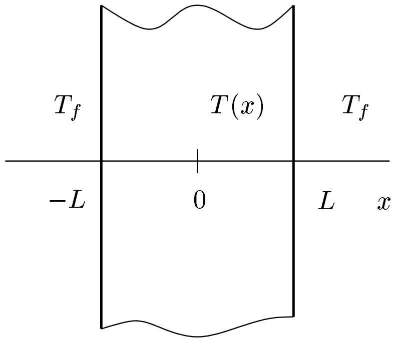
$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= -U_1X_1 + (1 - X_1)f(X_2), \\ \frac{dX_2}{ds} &= -U_1X_2 + \alpha(1 - X_1)f(X_2) - \beta(X_2 - U_2), \end{aligned}$$

där $f(X_2) = \delta \exp(\gamma X_2/(1 + X_2))$, $\gamma = E/(RT_f)$. Vad är α, β, δ?

(b) Antag att vi har bestämt ett jämviktsläge $\bar{X}, \bar{U}$. Linjärisera kring $\bar{X}, \bar{U}$. Skriv ned det linjäriserade systemet.

(c) Hur kan man bestämma stabiliteten hos jämviktsläget $\bar{X}, \bar{U}$?

4. (15 p) Temperaturen T `[K]` vid en exoterm reaktion i en porös katalysator i form av en platta (se figuren) vid stationära förhållanden bestäms av värmeledningsekvationen



$$-\lambda T''(x) = (-\Delta H)k, \ \texttt{[J/(m}^3\texttt{s)]} \qquad -L < x < L,$$

där värmeledningsförmågan λ `[J/(m K s)]`, reaktionsentalpin $-\Delta H$ `[J/mol]` och reaktionshastigheten k `[mol/(m³s)]` är positiva konstanter. (Obs att reaktionsentalpin $-\Delta H$ är positiv vid exoterm reaktion!)

(a) Vid $x = L$ använder vi Robins randvillkor

$$-\lambda T'(L) = h\big(T(L) - T_f\big), \quad \texttt{[J/(m}^2\texttt{s)]}$$

där h `[J/(m²sK)]` är en positiv koefficient. Vid $x = 0$ använder vi Neumanns randvillkor

$$T'(0) = 0.$$

Förklara den fysikaliska innebörden av dessa randvillkor.

(b) Med en grov förenkling antar vi att reaktionshastigheten ges av

$$k = \beta T, \quad \texttt{[mol/(m}^3\texttt{s)]}$$

där konstanten $\beta > 0$. Inför variabeln $u = (T - T_f)/T_f$. Visa hur problemet kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} -u''(r) &= \phi^2 u(r) + \phi^2, \quad 0 < r < 1, \\ u'(0) &= 0, \ u'(1) + \alpha u(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

där r är en lämpligt vald dimensionslös koordinat. Ange de dimensionslösa talen ϕ och α uttryckta i de givna koefficienterna.

Vänd!

(c) Lös randvärdesproblemet (2). Uttryck sedan temperaturen i de ursprungliga dimensionsbärande variablerna.

(d) Lösningen är inte fysikaliskt rimlig för alla positiva värden på ϕ (t ex $\phi = \pi/2$). Visa detta. Ge även en fysikalisk förklaring till detta.

Kontrollfrågor på inlämningsuppgifter.

5. (2.5 p) Hur bestämde vi talen δ och γ i inlämningsuppgift 1? (Se beteckningar i tentamensuppgift 3.)

6. (2.5 p) Vad är effektivitetsfaktorn för något i inlämningsuppgift 2?

/stig