TMA681 Tillämpad matematik K, 1999–05–25. Lösningar.

---

1. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{3}x_1^3+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+7x_1+8$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
f'_{x_1}(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-4x_2+7=0,\\
f'_{x_2}(x_1,x_2,x_3)&=2x_2-4x_1=0,\\
f'_{x_3}(x_1,x_2,x_3)&=2x_3=0.
\end{aligned}$$

Den tredje ekvationen ger $x_3=0$. Den andra ekvationen ger $2x_1=x_2$. Den första ekvationen ger sedan $x_1^2-8x_1+7=0$ med lösningarna $x_1=1$ och $x_1=7$, vilka ger $x_2=2$ respektive $x_2=14$. Vi har alltså två extrempunkter nämligen $(1,2,0)$ och $(7,14,0)$. Hessematrisen är

$$f''(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3}\\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_2x_3}\\ f''_{x_1x_3} & f''_{x_2x_3} & f''_{x_3x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1 & -4 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

I punkten $(1,2,0)$ får vi

$$f''(1,2,0)=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1=-2<0$, $\lambda_2=6>0$, $\lambda_3=2>0$, dvs matrisen är indefinit. Vi drar slutsatsen att $(1,2,0)$ är en sadelpunkt. I punkten $(7,14,0)$ får vi

$$f''(7,14,0)=\begin{bmatrix}14 & -4 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_{1,2}=8\pm\sqrt{52}>0$, $\lambda_3=2>0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(7,14,0)$ är en minimipunkt.

2. Den första ekvationen divideras med q_fc_f, den andra med $\rho c_pq_fT_f$. Med $\tau=V/q_f$ får vi

$$\begin{aligned}
\tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big)&=\frac{q}{q_f}\frac{c_f-c}{c_f}-\frac{c}{c_f}\tau k_0\exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big),\\
\tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big)&=\frac{q}{q_f}\frac{T_f-T}{T_f}+\frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_pT_f}\frac{c}{c_f}\tau k_0\exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big)-\frac{\kappa A\tau}{\rho c_pV}\Big(\frac{T-T_f}{T_f}-\frac{T_K-T_f}{T_f}\Big).
\end{aligned}$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$\begin{aligned}
&s=t/\tau,\\
&X_1(s)=\frac{c_f-c(s\tau)}{c_f},\quad X_2(s)=\frac{T(s\tau)-T_f}{T_f},\\
&U_1(s)=\frac{q(s\tau)}{q_f},\quad U_2(s)=\frac{T_K(s\tau)-T_f}{T_f},\\
&\alpha=\frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_pT_f},\quad \beta=\frac{\kappa A\tau}{\rho c_pV},\quad \gamma=\frac{E}{RT_f},\quad \delta=\tau k_0e^{-\gamma},\quad f(x)=\delta e^{\gamma x/(1+x)},
\end{aligned}$$

får vi

$$\frac{c}{c_f}=1-X_1,\quad \frac{T}{T_f}=X_2-1,\quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big)=-\frac{dX_1}{ds},\quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big)=\frac{dX_2}{ds},$$

$$\begin{aligned}
\tau k_0\exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big)&=\tau k_0\exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\Big)\exp\Big(\frac{E}{RT_f}-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T-T_f+T_f}\Big)\\
&=\delta\exp\Big(\gamma-\frac{\gamma}{X_2+1}\Big)=\delta\exp\Big(\gamma\frac{X_2}{X_2+1}\Big)=f(X_2).
\end{aligned}$$

Detta leder till det ickelinjära differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1}{ds}&=-U_1X_1+(1-X_1)f(X_2) &&(\,=F_1(X,U)\,),\\
\frac{dX_2}{ds}&=-U_1X_2+\alpha(1-X_1)f(X_2)-\beta(X_2-U_2) &&(\,=F_2(X,U)\,).
\end{aligned}$$

(b) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatriserna

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{U}_1 - f(\bar{X}_2) & (1-\bar{X}_1)f'(\bar{X}_2) \\ -\alpha f(\bar{X}_2) & -\bar{U}_1 + \alpha(1-\bar{X}_1)f'(\bar{X}_2) - \beta \end{bmatrix},$$

där

$$f'(x) = \frac{\gamma}{(1+x)^2} f(x),$$

och

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{X}_1 & 0 \\ -\bar{X}_2 & \beta \end{bmatrix}.$$

(c) Lösningar $x(t)$ till det linjäriserade ekvationssystemet är approximationer till störningar av jämviktsläget, $X(t) \approx \bar{X} + x(t)$. Genom att undersöka lösningarna till det linjäriserade systemet får man information om stabiliteten hos små störningar av jämviktsläget. Ett stabilitetsvillkor: systemet är asymptotiskt stabilt (dvs alla störningar går mot noll då $t \to \infty$) om och endast om alla egenvärden λ till Jacobimatrisen A har negativ realdel. Eftersom A är osymmetrisk kan dock $x(t)$ bli stor innan den går mot noll, dvs systemet kan vara instabilt trots att det är asymptotiskt stabilt. Detta kan man undersöka t ex genom att beräkna lösningar numeriskt till det linjäriserade och det ickelinjära systemet.

3. (a) Robins randvillkor är

$$-\lambda T'(-L) + h_{-L}(T(-L) - T_f) = 0,$$
$$\lambda T'(L) + h_L(T(L) - T_f) = 0.$$

där h_{-L} och h_L är positiva konstanter.

(b) Multiplicera ekvationen med $L^2/(\lambda T_f)$ så fås

$$-L^2 \frac{T''(x)}{T_f} = -L^2 \frac{(-\Delta H)\beta}{\lambda} \frac{T(x)}{T_f}.$$

Sätt $r = x/L$, $x = Lr$ och $u(r) = (T(Lr) - T_f)/T_f$, så fås $T(x) = T_f(1 + u(r))$, $u''(r) = L^2 T''(Lr)/T_f$ och

$$-u''(r) = \phi^2 u(r) + \phi^2, \quad \phi = L\sqrt{(-\Delta H)\beta/\lambda},$$
$$u(\pm 1) = (T(\pm L) - T_f)/T_f = 0.$$

(c) Differentialekvationen är $u'' + \phi^2 u = -\phi^2$, karakteristiska ekvationen är $p^2 + \phi^2 = 0$ med rötterna $p = \pm j\phi$. Allmänna lösningen till den homogena ekvationen $u'' + \phi^2 u = 0$ blir

$$u_h(r) = A\cos(\phi r) + B\sin(\phi r).$$

En partikulärlösning till den inhomogena ekvationen är $u_p(r) = -1$. Allmänna lösningen blir alltså

$$u(r) = A\cos(\phi r) + B\sin(\phi r) - 1.$$

Randvillkoren ger

$$0 = u(-1) = A\cos(-\phi) + B\sin(-\phi) = A\cos(\phi) - B\sin(\phi),$$
$$0 = u(1) = A\cos(\phi) + B\sin(\phi),$$

så att (genom att addera respektive subtrahera ekvationerna)

$$A = \frac{1}{\cos(\phi)}, \quad B = 0, \quad (\text{om } 0 < \phi < \pi/2, \text{ så att } \cos(\phi) > 0)$$

och lösningen blir

$$u(r) = \frac{\cos(\phi r)}{\cos(\phi)} - 1.$$

I de ursprungliga variablerna:

$$T(x) = \big(1 + u(x/L)\big)T_f = \frac{\cos(\phi x/L)}{\cos(\phi)}T_f, \quad \text{för } 0 < \phi = L\sqrt{(-\Delta H)\beta/\lambda} < \pi/2.$$

(d) Vi får noll i nämnaren då $\phi \to \pi/2$ så att $u(r) \to \infty$. Om ϕ är liten har vi en jämvikt: allt värme som bildas i katalysatorn transporteras ut till omgivningen genom värmeledning. Om man ökar ϕ, t ex genom att öka reaktionshastighetskonstanten β medan övriga konstanter är fixerade, så hinner till slut inte allt värme ledas bort utan temperaturen ökar obegränsat; jämvikt är inte möjlig. Samma sak händer om man minskar värmeledningsförmågan λ, ökar tjockleken L, eller ökar reaktionsentalpin $-\Delta H$.

Lösningsformeln gäller även för högre värden på ϕ, t ex $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$. Men denna lösning är ofysikalisk: temperaturen $T(x)$ tar negativa värden.

`/stig`