Matematik Chalmers

Tentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, 1999–05–25

Telefon: Stig Larsson, 772 35 43
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

---

1. (10 p) Undersök funktionen

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 7x_1 + 8$$

med avseende på lokala maxima, minima och sadelpunkter.

2. (15 p) Balansekvationerna för massa Vc `[mol]` och värmeenergi $\rho c_p VT$ `[J]` för en tankreaktor är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Vc) &= q(c_f - c) - Vck_0 \exp(-E/(RT)), \\ \frac{d}{dt}(\rho c_p VT) &= \rho c_p q(T_f - T) + (-\Delta H)Vck_0 \exp(-E/(RT)) - \kappa A(T - T_K). \end{aligned} \tag{1}$$

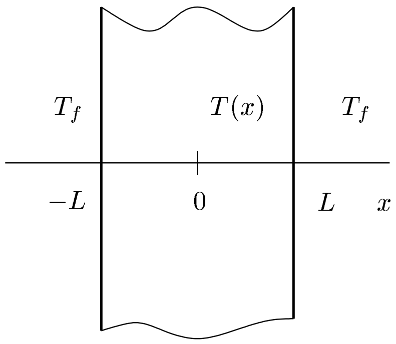
(a) Inför nya variabler $X_1 = (c_f - c)/c_f$ (omsättningsgraden), $X_2 = (T - T_f)/T_f$, $U_1 = q/q_f$, $U_2 = (T_K - T_f)/T_f$, där c_f, T_f, q_f är (lämpligt valda) konstanter. Visa hur systemet (1) kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= -U_1X_1 + (1 - X_1)f(X_2), \\ \frac{dX_2}{ds} &= -U_1X_2 + \alpha(1 - X_1)f(X_2) - \beta(X_2 - U_2), \end{aligned}$$

där $f(X_2) = \delta \exp(\gamma X_2/(1 + X_2))$, $\gamma = E/(RT_f)$. Vad är α, β, δ?

(b) Antag att vi har bestämt ett jämviktsläge $\bar{X}, \bar{U}$. Linjärisera kring $\bar{X}, \bar{U}$. Skriv ned det linjäriserade systemet.

(c) Hur kan man bestämma stabiliteten hos jämviktsläget $\bar{X}, \bar{U}$?



3. (15 p) Temperaturen T `[K]` vid en exoterm reaktion i en porös katalysator i form av en platta (se figuren) vid stationära förhållanden bestäms av värmeledningsekvationen

$$-\lambda T''(x) = (-\Delta H)k, \ \ \texttt{[J/(m}^3\texttt{s)]} \quad -L < x < L,$$

där värmeledningsförmågan λ `[J/(m K s)]`, reaktionsentalpin $-\Delta H$ `[J/mol]` och reaktionshastigheten k `[mol/(m³s)]` är positiva konstanter. (Obs att reaktionsentalpin $-\Delta H$ är positiv vid exoterm reaktion!)

(a) Skriv ned Robins randvillkor vid $x = -L$ och $x = L$.

(b) Med en grov förenkling antar vi att reaktionshastigheten ges av

$$k = \beta T, \quad \texttt{[mol/(m}^3\texttt{s)]}$$

där konstanten $\beta > 0$. Vi antar vidare att Dirichlets randvillkor $T = T_f$ gäller vid $x = -L$ och $x = L$. Inför variabeln $u = (T - T_f)/T_f$. Visa hur problemet kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} -u''(r) &= \phi^2 u(r) + \phi^2, \quad -1 < r < 1, \\ u(-1) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

där r är en lämpligt vald dimensionslös koordinat.

Vänd!

(c) Lös randvärdesproblemet (2) för $0 < \phi < \pi/2$. Uttryck sedan temperaturen i de ursprungliga dimensionsbärande variablerna.

(d) Lösningen upphör att gälla då $\phi \to \pi/2$. Ge en fysikalisk förklaring till detta.

4. (10 p) Redogör för ett moment ur kursen som du tycker är speciellt intressant. (Syftet med uppgiften är att testa dels att du har förstått momentet ifråga, dels din förmåga att presentera vad du har lärt. Tips: beskriv teori, hitta på och lös ett belysande problem, etc. Visa vad du kan! Sträva efter att skriva kort; kvalitet ger mer poäng än kvantitet.)

Kontrollfrågor på inlämningsuppgifter.

5. (2.5 p) Redogör för alla termer i ekvationssystemet (1).

6. (2.5 p) Vad är effektivitetsfaktorn för något?

`/stig`