Matematik Chalmers

Tentamen i TMV040 Tillämpad matematik K, 2005–01–13 f M

Telefon: Karin Kraft 0739–779268

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Tabell för Laplacetransform från kompendiet finns på baksidan av detta blad.

Betygsgränser: 20–29 poäng 3, 30–39 poäng 4, 40–50 poäng 5.

---

1. (10 p) Funktionen f är periodisk med period 2π och $f(t) = \sin(t)$ för $0 \le t \le \pi$, $f(t) = 0$ för $-\pi \le t \le 0$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie.

Tips: $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$, $2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

2. (10 p) Betrakta egenvärdesproblemet

$$X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < 1; \quad X(0) = 0,\ X'(1) = 0.$$

(a) Visa att egenfunktioner som hör till olika egenvärden är ortogonala.

(b) Lös egenvärdesproblemet.

3. (15 p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u''(t) - 9u(t) = 0 \\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Lös (1) med hjälp av metoden med Laplacetransform.

(c) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

(e) Diskutera systemets stabilitet.

4. (15 p) Tankreaktorn. (a) Visa att massbalansekvationen

$$V\frac{dc}{dt} = q(c_f - c) - kcV$$

kan transformeras till dimensionslös form

$$\frac{dX}{ds} = -(k\tau + U)X + U.$$

Bestäm $X(s)$ då $U = 0$. Bestäm $X(s)$ då $U = \bar{U}$ är konstant. Visa att lösningen i detta fall går mot ett stationärt tillstånd, $X(s) \to \bar{X}$ då $s \to \infty$. Bestäm $\bar{X}$. Vad betyder detta fysikaliskt? Hur ska $\bar{U}$ väljas för att $\bar{X}$ ska bli 0.5?

`/stig`

Vänd!

TABELL FÖR LAPLACETRANSFORMATION

	$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
L01	$f(t)$	$\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$
L02	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
L03	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
L04	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
L05	$f(t-T)\Theta(t-T) \quad (T \geq 0)$	$e^{-Ts}F(s)$
L06	$f'(t)$	$sF(s) - f(0-)$
L07	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0-)$
L08	$\int_{0-}^{t} f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
L09	$\int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
L09'	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ $f(t)=g(t)=0$ för $t<0$	$F(s)G(s)$
L10	$\delta(t)$	1
L11	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
L12	1	$\frac{1}{s}$
L13	$\frac{t^n}{n!}$	s^{-n-1}

TABELL FÖR LAPLACETRANSFORMATION (forts.)

	$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
L14	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
L15	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
L16	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
L17	$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
L18	$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
L19	$\delta(t-T) \quad (T \geq 0)$	$e^{-Ts} \quad (T \geq 0)$
L20	$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-a^2/4t} \quad (a>0)$	$e^{-a\sqrt{s}} \quad (a>0)$
L21	$\ell_n(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$	$\frac{(s-\frac{1}{2})^n}{(s+\frac{1}{2})^{n+1}}$

TMV040 Tillämpad matematik K, 2005–01–13 f M. Lösningar.

1.

$$T = 2\pi,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sin((1-n)t)+\sin(1+n)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((1-n)t)}{1-n} - \frac{\cos((1+n)t)}{1+n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-1)t)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi)-1}{n-1} - \frac{\cos((n+1)\pi)-1}{n+1}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{för } n = 2k+1 \text{ (udda)}, \\ \frac{2}{\pi}\frac{-1}{(2k+1)(2k-1)} & \text{för } n = 2k \text{ (jämnt)}, \end{cases}
\end{aligned}$$

speciellt: $a_0 = \dfrac{2}{\pi}$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos((n-1)t)-\cos(n+1)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-1)t)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} \\
&= 0 \quad \text{för } n > 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(1-\cos(2t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\cos(2kt)
\end{aligned}$$

2. (a) Se boken.
(b) $\lambda_n = -((2n+1)\frac{\pi}{2})^2$, $X_n(x) = \sin((2n+1)\frac{\pi}{2}x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 9 = 0$ med rötterna $r_1 = -3$, $r_2 = 3$. Den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned}
u(t) &= Ae^{-3t} + Be^{3t} \\
u'(t) &= -3Ae^{-t} + 3Be^{3t}.
\end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = A + B, \\
u_1 &= u'(0) = -3A + 3B,
\end{aligned}$$

dvs $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$. Alltså:

$$u(t) = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t} = u_0 \cosh(3t) + \frac{1}{3}u_1 \sinh(3t).$$

(b) Laplacetransformering ger

$$s^2 U(s) - su_0 - u_1 - 9U(s) = 0$$

vilket leder till

$$U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2 - 9} = \frac{su_0 + u_1}{(s+3)(s-3)}$$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{su_0 + u_1}{(s+3)(s-3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3) + B(s+3)}{(s+3)(s-3)}$$

Identifiering av koefficienter ger $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$ så att

$$U(s) = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)\frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)\frac{1}{s-3}$$

Inverstransformering

$$u(t) = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t}$$

(c) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$\begin{aligned} x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = 9u = 9x_1, \end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; 9 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena -3 och 3, dvs ett är negativt. Det betyder att systemet är instabilt.

4. Ekvationen divideras med $q_f c_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\tau \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{c_f}\right) = \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau, \quad X(s) = \frac{c(s\tau)}{c_f}, \quad U(s) = \frac{q(s\tau)}{q_f},$$

får vi

$$\frac{c}{c_f} = X, \quad \tau \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{c_f}\right) = \frac{dX}{ds}.$$

Detta leder till

$$\frac{dX}{ds} = U(1 - X) - k\tau X = -(k\tau X + U) + U.$$

Med $U = 0$ får vi $X(s) = X_0 \exp(-k\tau s)$. Med $U = \bar{U}$ får vi

$$X(s) = X_0 \exp(-(k\tau + \bar{U})s) + \bar{U}\frac{1 - \exp(-(k\tau + \bar{U})s)}{k\tau + \bar{U}}.$$

Då $s \to \infty$ får vi

$$\bar{X} = \frac{\bar{U}}{k\tau + \bar{U}}.$$

Alternativt har vi att stationära punkter ges av

$$0 = -(k\tau\bar{X} + \bar{U}) + \bar{U}.$$

Vi löser ut styrvariabeln (med $\bar{X} = 0.5$)

$$\bar{U} = k\tau\frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}} = k\tau.$$

`/stig`