TMA681 Tillämpad matematik K (inskrivna 2000 och tidigare), 2004–08–25 f M

Telefon: Karin Kraft, Fredrik Bengzon 0739–779268, 0762–186654 (Stig Larsson 0733–409 006)
Hjälpmedel: Beta och Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 20–29 poäng 3, 30–39 poäng 4, 40–50 poäng 5.

---

1. (10 p) Funktionen f är periodisk med period 2π och $f(t) = \sin(t)$ för $0 \le t \le \pi$, $f(t) = 0$ för $-\pi \le t \le 0$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie.

Tips: $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$, $2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

2. (10 p) Katalysatorn. (a) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -c''(x) &= -\phi^2 c(x), \quad 0 < x < 1, \\ c'(0) &= 0,\ c'(1) + \nu\big(c(1) - 1\big) = 0, \end{aligned}$$

där ϕ, ν är konstanter.

(b) Beräkna kvantiteten $\eta = \int_0^1 c(x)\,dx$.

(c) Ange en kemiteknisk tolkning av differentialekvationen, randvillkoren och kvantiteten η.

(d) Vilka värden på konstanten ν kan förekomma (t ex $\nu < 0$, $\nu = 0$, $\nu > 0$, $\nu = \infty$)? Varför?

(e) Vad blir η då $\nu = 0$? Hur varierar η då ν ökar? (Minskar, ökar, annat? Bevisa!) Är detta rimligt med tanke på den kemitekniska tolkningen?

3. (15 p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} u''(t) - 9u(t) &= 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen.

(c) Lös detta system med egenvektormetoden.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

(e) Diskutera systemets stabilitet.

4. (15 p) Tankreaktorn. (a) Visa att massbalansekvationen

$$V\frac{dc}{dt} = q(c_f - c) - kcV$$

kan transformeras till dimensionslös form

$$\frac{dX}{ds} = -(k\tau + U)X + U.$$

Bestäm $X(s)$ då $U = 0$. Bestäm $X(s)$ då $U = \bar{U}$ är konstant. Visa att lösningen i detta fall går mot ett stationärt tillstånd, $X(s) \to \bar{X}$ då $s \to \infty$. Bestäm $\bar{X}$. Vad betyder detta fysikaliskt? Hur ska $\bar{U}$ väljas för att $\bar{X}$ ska bli 0.5?

/stig

TMA681 Tillämpad matematik K (inskrivna 2000 och tidigare), 2004–08–25 f M.
Lösningar.

1.

$$
\begin{aligned}
&T = 2\pi,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \\
&a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sin((1-n)t)+\sin(1+n)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((1-n)t)}{1-n}-\frac{\cos((1+n)t)}{1+n}\right]_0^{\pi} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-1)t)}{n-1}-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi)-1}{n-1}-\frac{\cos((n+1)\pi)-1}{n+1}\right) \\
&\quad = \begin{cases} 0 & \text{för } n = 2k+1 \text{ (udda)}, \\ \frac{2}{\pi}\frac{-1}{(2k+1)(2k-1)} & \text{för } n = 2k \text{ (jämnt)}, \end{cases} \\
&\text{speciellt: } a_0 = \frac{2}{\pi}. \\
&b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(nt)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos((n-1)t)-\cos(n+1)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-1)t)}{n-1}-\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} \\
&\quad = 0 \quad \text{för } n > 1, \\
&b_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(t)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(1-\cos(2t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}. \\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t\Big) \\
&\quad = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\cos(2kt)
\end{aligned}
$$

2. (a) Allmänna lösningen blir

$$c(x) = A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x)$$

med derivatan

$$c'(x) = A\phi\sinh(\phi x) + B\phi\cosh(\phi x).$$

Randvillkoren ger

$$
\begin{aligned}
&0 = c'(0) = B\phi, \quad \text{så att } B = 0, \\
&0 = c'(1) + \nu\big(c(1)-1\big) = A\phi\sinh(\phi) + \nu\big(A\cosh(\phi)-1\big)
\end{aligned}
$$

så att

$$A = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi)+\nu\cosh(\phi)}$$

och

$$c(x) = \frac{\nu \cosh(\phi x)}{\phi \sinh(\phi) + \nu \cosh(\phi)}.$$

(b)

$$\begin{aligned}\eta &= \int_0^1 c(x)\,dx = \frac{\nu}{\phi \sinh(\phi) + \nu \cosh(\phi)} \int_0^1 \cosh(\phi x)\,dx \\ &= \frac{\nu}{\phi \sinh(\phi) + \nu \cosh(\phi)} \frac{\sinh(\phi)}{\phi} = \frac{\tanh(\phi)}{\phi} \frac{\nu}{\phi \tanh(\phi) + \nu}.\end{aligned}$$

(c) Differentialekvationen är matematisk modell för reaktion och diffusion i en porös katalysatorpellet vid isoterma och stationära förhållanden och “platt” geometri. Ekvationen är skriven på dimensionslös form. Det första randvillkoret betyder att lösningen är en jämn funktion. Det andra randvillkoret beskriver flödet genom randen. ν är en dimensionslös genomgångskoefficient. η är effektivitetsfaktorn.

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 9 = 0$ med rötterna $r_1 = -3$, $r_2 = 3$. Den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned}u(t) &= Ae^{-3t} + Be^{3t} \\ u'(t) &= -3Ae^{-t} + 3Be^{3t}.\end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned}u_0 &= u(0) = A + B, \\ u_1 &= u'(0) = -3A + 3B,\end{aligned}$$

dvs $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$. Alltså:

$$u(t) = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t} = u_0 \cosh(3t) + \frac{1}{3} u_1 \sinh(3t).$$

(b) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$\begin{aligned}x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = 9u = 9x_1,\end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$ och egenvektorer $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Lösningen blir

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} g_1 + Be^{\lambda_2 t} g_2 = Ae^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + Be^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = x(0) = A \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

dvs $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$. Alltså:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; 9 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena -3 och 3, dvs ett är negativt. Det betyder att systemet är instabilt.

4. Ekvationen divideras med $q_f c_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau, \quad X(s) = \frac{c(s\tau)}{c_f}, \quad U(s) = \frac{q(s\tau)}{q_f},$$

får vi

$$\frac{c}{c_f} = X, \quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{dX}{ds}.$$

Detta leder till

$$\frac{dX}{ds} = U(1-X) - k\tau X = -(k\tau X + U) + U.$$

Med $U = 0$ får vi $X(s) = X_0 \exp(-k\tau s)$. Med $U = \bar{U}$ får vi

$$X(s) = X_0 \exp(-(k\tau + \bar{U})s) + \bar{U}\frac{1 - \exp(-(k\tau + \bar{U})s)}{k\tau + \bar{U}}.$$

Då $s \to \infty$ får vi

$$\bar{X} = \frac{\bar{U}}{k\tau + \bar{U}}.$$

Alternativt har vi att stationära punkter ges av

$$0 = -(k\tau\bar{X} + \bar{U}) + \bar{U}.$$

Vi löser ut styrvariabeln (med $\bar{X} = 0.5$)

$$\bar{U} = k\tau\frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}} = k\tau.$$

`/stig`