Tentamen i TMV040 Tillämpad matematik K (inskrivna 2001), 2004–08–25 f M

Telefon: Karin Kraft, Fredrik Bengzon 0739–779268, 0762–186654 (Stig Larsson 0733–409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 20–29 poäng 3, 30–39 poäng 4, 40–50 poäng 5.

---

1. (10 p) Funktionen f är periodisk med period 2π och $f(t) = \sin(t)$ för $0 \le t \le \pi$, $f(t) = 0$ för $-\pi \le t \le 0$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie.

Tips: $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$, $2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

2. (10 p) Betrakta egenvärdesproblemet

$$X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < 1; \quad X(0) = 0,\ X'(1) = 0.$$

(a) Visa att egenfunktioner som hör till olika egenvärden är ortogonala.

(b) Lös egenvärdesproblemet.

3. (15 p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u''(t) - 9u(t) = 0 \\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen.

(c) Lös detta system med egenvektormetoden.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

(e) Diskutera systemets stabilitet.

4. (15 p) Tankreaktorn. (a) Visa att massbalansekvationen

$$V\frac{dc}{dt} = q(c_f - c) - kcV$$

kan transformeras till dimensionslös form

$$\frac{dX}{ds} = -(k\tau + U)X + U.$$

Bestäm $X(s)$ då $U = 0$. Bestäm $X(s)$ då $U = \bar{U}$ är konstant. Visa att lösningen i detta fall går mot ett stationärt tillstånd, $X(s) \to \bar{X}$ då $s \to \infty$. Bestäm $\bar{X}$. Vad betyder detta fysikaliskt? Hur ska $\bar{U}$ väljas för att $\bar{X}$ ska bli 0.5?

`/stig`

TMV040 Tillämpad matematik K (inskrivna 2001), 2004–08–25 f M. Lösningar.

1.

$$T = 2\pi,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sin((1-n)t) + \sin(1+n)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((1-n)t)}{1-n} - \frac{\cos((1+n)t)}{1+n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-1)t)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi)-1}{n-1} - \frac{\cos((n+1)\pi)-1}{n+1}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{för } n = 2k+1 \text{ (udda)}, \\ \frac{2}{\pi}\frac{-1}{(2k+1)(2k-1)} & \text{för } n = 2k \text{ (jämnt)}, \end{cases}
\end{aligned}$$

speciellt: $a_0 = \dfrac{2}{\pi}$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos((n-1)t) - \cos(n+1)t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-1)t)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} \\
&= 0 \quad \text{för } n > 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(1 - \cos(2t)\Big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t\Big) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\cos(2kt)
\end{aligned}$$

2. (a) Se boken.
(b) $\lambda_n = -((2n+1)\frac{\pi}{2})^2$, $X_n(x) = \sin((2n+1)\frac{\pi}{2}x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 9 = 0$ med rötterna $r_1 = -3$, $r_2 = 3$. Den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned}
u(t) &= Ae^{-3t} + Be^{3t} \\
u'(t) &= -3Ae^{-t} + 3Be^{3t}.
\end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = A + B, \\
u_1 &= u'(0) = -3A + 3B,
\end{aligned}$$

dvs $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$. Alltså:

$$u(t) = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t} = u_0 \cosh(3t) + \frac{1}{3}u_1 \sinh(3t).$$

(b) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$\begin{aligned} x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = 9u = 9x_1, \end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$ och egenvektorer $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Lösningen blir

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t}g_1 + Be^{\lambda_2 t}g_2 = Ae^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + Be^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = x(0) = A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

dvs $A = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)$, $B = \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)$. Alltså:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{6}(3u_0 - u_1)e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(3u_0 + u_1)e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; 9 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena -3 och 3, dvs ett är negativt. Det betyder att systemet är instabilt.

4. Ekvationen divideras med $q_f c_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau, \quad X(s) = \frac{c(s\tau)}{c_f}, \quad U(s) = \frac{q(s\tau)}{q_f},$$

får vi

$$\frac{c}{c_f} = X, \quad \tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{dX}{ds}.$$

Detta leder till

$$\frac{dX}{ds} = U(1 - X) - k\tau X = -(k\tau X + U) + U.$$

Med $U = 0$ får vi $X(s) = X_0 \exp(-k\tau s)$. Med $U = \bar{U}$ får vi

$$X(s) = X_0 \exp(-(k\tau + \bar{U})s) + \bar{U}\frac{1 - \exp(-(k\tau + \bar{U})s)}{k\tau + \bar{U}}.$$

Då $s \to \infty$ får vi

$$\bar{X} = \frac{\bar{U}}{k\tau + \bar{U}}.$$

Alternativt har vi att stationära punkter ges av

$$0 = -(k\tau\bar{X} + \bar{U}) + \bar{U}.$$

Vi löser ut styrvariabeln (med $\bar{X} = 0.5$)

$$\bar{U} = k\tau\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} = k\tau.$$

`/stig`