Matematik Chalmers

Tentamen i TMV040 Tillämpad matematik K, 2004–01–15 f V

Telefon: Niclas Andreasson 0740–459022 (examinator Stig Larsson 0733–409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 20–29 poäng 3, 30–39 poäng 4, 40–50 poäng 5.

---

1. (10 p) Funktionen f är periodisk med period 2π och $f(t) = \sin(t)$ för $0 \le t \le \pi$, $f(t) = 0$ för $-\pi \le t \le 0$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie.

Tips: $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$, $2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

2. (10 p) Betrakta egenvärdesproblemet

$$X''(x) = \lambda X(x),\ 0 < x < 1; \quad X(0) = 0,\ X'(1) = 0.$$

(a) Visa att egenfunktioner som hör till olika egenvärden är ortogonala.

(b) Lös egenvärdesproblemet.

3. (15 p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} u''(t) - 9u(t) &= 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen.

(c) Lös detta system med egenvektormetoden.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

(e) Diskutera systemets stabilitet.

4. (15 p) Tankreaktorn. Balansekvationerna för massa Vc `[mol]` och värmeenergi $\rho c_p VT$ `[J]` för en tankreaktor är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Vc) &= q(c_f - c) - Vck_0\exp(-E/(RT)), \\ \frac{d}{dt}(\rho c_p VT) &= \rho c_p q(T_f - T) + (-\Delta H)Vck_0\exp(-E/(RT)) - \kappa A(T - T_K). \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Inför nya variabler $X_1 = c/c_f$, $X_2 = T/T_f$, $U_1 = q/q_f$, $U_2 = T_K/T_f$, där c_f, T_f, q_f är (lämpligt valda) konstanter. Visa hur systemet (2) kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= U_1(1 - X_1) - X_1 f(X_2), \\ \frac{dX_2}{ds} &= U_1(1 - X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2), \end{aligned}$$

där $f(X_2) = \delta\exp(\gamma - \gamma/X_2)$, $\gamma = E/(RT_f)$. Vad blir då α, β, δ?

(b) Antag att man har bestämt α, γ och δ till 0.3, 30, respektive 0.1. Bestäm styrvariablerna $\bar{U}_1$ och $\bar{U}_2$ så att systemet får en stationär lösning vid $\bar{X}_1 = 0.5$ och $\bar{X}_2 = 1$.

(c) Linjärisera systemet kring den stationära lösningen i (b). För vilka värden på β är den stationära lösningen stabil? Vad betyder detta fysikaliskt?

Tips: räkna approximativt i (b) och (c). Obs att $f(1) = 0.1$ och $f'(1) = 3$, $\alpha f(1) = 0.03 \approx 0$. Dvs sätt 0 i nedre vänstra hörnet av Jacobimatrisen.

`/stig`