Matematik Chalmers

Tentamen i TMA681 Tillämpad matematik K (gamla kursen), 2003–05–24

Telefon: Alexander Herbertsson, 0740–459022 (Stig Larsson 0733–409 006)

Hjälpmedel: Beta och Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten. Tabell för Laplacetransform från kompendiet på baksidan av detta blad.

Betygsgränser: 20–29 poäng 3, 30–39 poäng 4, 40–50 poäng 5.

---

1. (10 p) Funktionen f är udda och periodisk med period 6 och $f(t) = 1$ för $0 < t < 1$, $f(t) = 0$ för $1 < t < 3$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Rita amplitudspektrum (de första 7 termerna räcker).

2. (10 p) Katalysatorn. (a) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -c''(x) &= -\phi^2 c(x), \quad 0 < x < 1, \\ c'(0) &= 0, \ c'(1) + \nu\big(c(1) - 1\big) = 0, \end{aligned}$$

där ϕ, ν är konstanter.

(b) Beräkna kvantiteten $\eta = \int_0^1 c(x)\,dx$.

(c) Ange en kemiteknisk tolkning av differentialekvationen, randvillkoren och kvantiteten η.

(d) Vilka värden på konstanten ν kan förekomma (t ex $\nu < 0$, $\nu = 0$, $\nu > 0$, $\nu = \infty$)? Varför?

(e) Vad blir η då $\nu = 0$? Hur varierar η då ν ökar? (Minskar, ökar, annat? Bevisa!) Är detta rimligt med tanke på den kemitekniska tolkningen?

3. (15 p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) &= 0 \\ u(0) = u_0, \ u'(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Lös (1) med hjälp av metoden med Laplacetransform.

(c) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen. Lös detta med hjälp av egenvektormetoden.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

(e) Diskutera systemets stabilitet.

4. (15 p) Tankreaktorn. Balansekvationerna för massa Vc `[mol]` och värmeenergi $\rho c_p VT$ `[J]` för en tankreaktor är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Vc) &= q(c_f - c) - Vck_0 \exp(-E/(RT)), \\ \frac{d}{dt}(\rho c_p VT) &= \rho c_p q(T_f - T) + (-\Delta H)Vck_0 \exp(-E/(RT)) - \kappa A(T - T_K). \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Inför nya variabler $X_1 = c/c_f$, $X_2 = T/T_f$, $U_1 = q/q_f$, $U_2 = T_K/T_f$, där c_f, T_f, q_f är (lämpligt valda) konstanter. Visa hur systemet (2) kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= U_1(1 - X_1) - X_1 f(X_2), \\ \frac{dX_2}{ds} &= U_1(1 - X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2), \end{aligned}$$

där $f(X_2) = \delta \exp(\gamma - \gamma/X_2)$, $\gamma = E/(RT_f)$. Vad blir då α, β, δ?

(b) Antag att man har bestämt α, γ och δ till 0.3, 30, respektive 0.1. Bestäm styrvariablerna $\bar{U}_1$ och $\bar{U}_2$ så att systemet får en stationär lösning vid $\bar{X}_1 = 0.5$ och $\bar{X}_2 = 1$.

(c) Linjärisera systemet kring den stationära lösningen i (b). För vilka värden på β är den stationära lösningen stabil? Vad betyder detta fysikaliskt?

Tips: räkna approximativt i (b) och (c). Obs att $f(1) = 0.1$ och $f'(1) = 3$, $\alpha f(1) = 0.03 \approx 0$. Dvs sätt 0 i nedre vänstra hörnet av Jacobimatrisen.

`/stig`