Lösningar till tenta 2003-01-16

1. Ekvationen $f(x,y) = 0$ är ekvivalent med $q(x,y) = 2$ där $q(x) = x^2 - 4xy + 3y^2$. Detta är en kvadratisk form med matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Denna matris har egenvärdena $2 \pm \sqrt{5}$. Ekvationens kanoniska form blir alltså

$$(2+\sqrt{5})\xi^2 + (2-\sqrt{5})\eta^2 = 2.$$

Den beskriver alltså en hyperbel med huvudaxellängderna $\sqrt{2/(2+\sqrt{5})}$ och $\sqrt{2/(\sqrt{5}-2)}$. Riktningarna ges av matrisens egenvektorer, som beräknas till $(\sqrt{5}-1,-2)^t$ respektive $(2,\sqrt{5}-1)^t$.

2. V är inte ett linjärt rum till exempel för att den distributiva lagen spricker. För att se detta låt A vara enhetskvadraten $[0,1]^2$. Då är $2A + (-1)A = [-1,2]^2$ medan $(2+(-1))A = 1A = [0,1]^2$.

3. Den allmänna formen för värmeledningsekvationen i en lång cylinder i aktuell position är

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = f \\ u'_x + h(1)(u(1) - u_a(1)) = 0 \\ -u'_x(0) + h(0)(u(0) - u_a(0)) = 0 \end{cases}$$

Givet i uppgiften är att $f = x - x^2$, $h(0) = 3$, $h(1) = 1$ och $u_a(x) = ((x-\frac{1}{2})^2 + 2)^{-1}$ (ty $y = z = 1$ längs hela cylindern) ur vilket vi avläser att $u_a(0) = u_a(1) = 4/9$. Ekvationen blir alltså

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = x - x^2 \\ u'_x(1) + u(1) - \frac{4}{9} = 0 \\ -u'_x(0) + 3(u(0) - \frac{4}{9}) = 0 \end{cases}$$

För att finna den stationära lösningen sätter man $u'_t = 0$ och får $u''_{xx} = x^2 - x$ som har som allmän lösning

$$u(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + Cx + D.$$

Randvillkoren blir då

$$\begin{cases} 2C + D = \frac{25}{36} \\ -C + 3D = \frac{4}{3} \end{cases}$$

ur vilket vi får $C = \frac{3}{28}$ och $D = \frac{121}{252}$ så att

$$u(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{28} + \frac{121}{252}.$$

4. Enligt dimensionssatsen gäller att dimensionen av A's nollrum är 2, dvs man kan finna två stycken linjärt oberoende vektorer $\mathbf{x}$ med $A\mathbf{x} = 0$. Detta betyder att 0 är ett egenvärde till A med multiplicitet minst 2.

5. Kalla frekvensfunktionen för $X + Y$ för g. Laplacetransformen för g är

$$\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \mathbf{E}[e^{-s(X+Y)}] = \mathbf{E}[e^{-sX}e^{-sY}]$$

$$\mathbf{E}[e^{-sX}]\mathbf{E}[e^{-sY}] = \int_0^\infty e^{-st} f_X(t)dt \int_0^\infty e^{-st} f_Y(t)dt$$

där den näst sista likheten följer av oberoendet mellan X och Y. Det sista uttrycket är produkten av Laplacetransformerna för X och Y. De sistnämnda blir $\frac{1}{s}(1 - e^{-s})$ respektive $\frac{1}{2s}(1 - e^{-2s})$, varför g alltså har Laplacetransformen $\frac{1}{s}(1-e^{-s})\frac{1}{2s}(1-e^{-2s}) = \frac{1}{2s^2}(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})$. Härav kan vi, med hjälp av fördröjningssatsen, avläsa att

$$g(t) = \frac{1}{2}(t\Theta(t) - (t-1)\Theta(t-1) - (t-2)\Theta(t-2) + (t-3)\Theta(t-3)$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \vee t > 3 \\ \frac{1}{2}t, & 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le t \le 2 \\ \frac{1}{2}(3-t), & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

/Johan Jonasson