Matematik Chalmers

Tentamen i Tillämpad matematik K2, tma681, torsdagen den 16 januari 2003 kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

Telefonvakt: Martin Gilstedt, tel. 0740-459022

1. (10p) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara given av
$$f(x,y) = x^2 - 4xy + 3y^2 - 2.$$
Vad är den geometriska betydelsen av ekvationen
$$f(x,y) = 0?$$
Ange såväl kurvans form som dess huvudaxlar.

2. (7p) Låt V vara familjen av alla rektanglar (i planet) som innehåller origo och som har två sidor parallella med x-axeln (och därmed de andra tvåsidorna parallella med y-axeln). För $A, B \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$, sätt
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
$$\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}.$$
Visa att V *inte* är ett linjärt rum.

3. (13p) En lång cylinder med isolerad mantelyta är placerad längs x -axeln i rummet med vänster ände i origo och höger ände i $x = 1$. Hur ser den dimensionslösa formen för värmeledningsekvationen i cylindern ut om källtätheten ges av $x - x^2$, omgivningens temperatur i (x, y, z) ges av $((x - \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2)^{-1}$ och värmeöverföringskoefficienten i höger ände är 1 och i vänster ände 3? Bestäm också den stationära lösningen.

4. (10p) Låt A vara en 5×5-matris för vars kolonnrum C_A det gäller att $dimC_A = 3$. Förklara vad detta säger om A's egenvärden.

5. (10p) Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler som är likformigt fördelade på $(0,1)$ respektive $(0,2)$, dvs deras frekvensfunktioner ges av
$$f_X(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$
$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < t < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$
Beräkna med hjälp av Laplacetransform frekvensfunktionen för $X + Y$.

   Tips: Kom ihåg att eftersom X och Y är oberoende gäller för godtyckliga funktioner g och h att $\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$.

/Johan Jonasson