Lösningar till tenta 2002-08-28

1. (a) Eftersom periodlängden är 2π ska vi skriva f på formen

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

och eftersom f är en jämn funktion gäller att $b_n = 0$ för alla n. Vidare gäller att $a_0 = 0$ då ju medelvärdet av f över en period uppenbarligen är 0. Vi får

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(t)\cos nt dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos nt dt$$
$$= \frac{2}{n\pi}[\sin nt]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

dvs

$$f(t) = \frac{4}{\pi}(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t - \frac{1}{7}\cos 7t + \ldots).$$

(b) Med $t = 0$ får man att

$$1 = f(t) = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots)$$

ur vilket vi direkt erhåller att serien i fråga har värdet $\pi/4$.

(c) Enligt Parsevals formel gäller att medelvärdet av $f(t)^2$ är $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$. I det aktuella fallet gäller att $f(t)^2 \equiv 1$ så att medelvärdet blir just 1 och att summan i fråga är

$$\frac{8}{\pi^2}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots)$$

varför den sökta serien blir $\pi^2/8$.

2. (a) X_1 står för koncentrationen av det reagerande ämnet, X_2 för temperaturen i reaktorn, U_1 för flödeshastigheten genom reaktorn och U_2 för kylvatttentankens temperatur.

(b) Det linjäriserade systemet är

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s)$$

där $x \approx X - \bar{X}$, $u \approx U - \bar{U}$ och A och B är Jacobimatriserna m.a.p. X repektive U i punkten $(\bar{X}, \bar{U})$. I detta fall får vi

$$A = \begin{bmatrix} -U_1 - f(X_2) & -X_1 f'(X_2) \\ \alpha f(X_2) & -U_1 + \alpha X_1 f'(X_2) - \beta \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 - X_1 & 0 \\ 1 - X_2 & \beta \end{bmatrix}.$$

(c) Man undersöker egenvärdena till matrisen A: Om båda egenvärdena har negativ realdel betyder detta att jämviktsläget är stabilt förutsatt att x från början är lien och att u håller sig liten. Om minst ett av egenvärdena är positivt är jämviktsläget instabilt.

3. (a) För att ekvationen ska beskriva två parallella plan krävs att dess kanoniska form är av typen $\lambda\xi^2 = 1$, dvs att matrisen har 0 som ett dubbelt egenvärde. För att avståndet mellan planen ska vara det önskade noterar vi att vi har $\xi = \pm\sqrt{1/\lambda}$. Vi vill alltså att $\sqrt{1/\lambda} = 3$, dvs $\lambda = 1/9$. Således: Matrisen har ett enkelt egenvärde i $1/9$ och ett dubbelt i 0.

   (b) I detta fall vill vi att den kanoniska formen ska vara $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, dvs alla tre egenvärdena ska vara 1. Den enda matris med denna egenskap är enhetsmatrisen E. För att visa detta, kalla den sökta matrisen A och diagonalisera:

$$A = PDP^t$$

där P är ortogonal och D är den diagonalmatris som har A's egenvärden på huvuddiagonalen. I detta fall är $D = E$ så vi får $A = PEP^t = PP^t = E$.

4. (a) Vi börjar med att observera att

$$D^* \bigtriangledown^* u = D^*(\frac{\partial u}{\partial x^*}, \frac{\partial u}{\partial y^*}, \frac{\partial u}{\partial z^*}) = \frac{DL}{c_f D_{ref}}(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$$

$$= \frac{DL}{c_f D_{ref}} \bigtriangledown c.$$

Därför gäller att

$$div^*(D^* \bigtriangledown^* u) = \frac{L}{c_f D_{ref}} div^*(D \bigtriangledown c) = \frac{L^2}{c_f D_{ref}} div(D \bigtriangledown c)$$

$$\frac{L^2 kc}{c_f D_{ref}} = \frac{L^2 k_{ref}}{D_{ref}} k^* u = \phi^2 k^* u.$$

   (b) Enligt (2) gäller att $k^* u = \frac{1}{\phi^2} div^*(D^* \bigtriangledown^* u)$ så att

$$\eta = \frac{1}{\phi^2 vol^*(V^*)} \int\int\int_{V^*} div^*(D^* \bigtriangledown^* y) dx^* dy^* dz^*.$$

Av Gauss divergenssats följer då att

$$\eta = \frac{1}{\phi^2 vol^*(V^*)} \int\int_{S^*} ((D^* \bigtriangledown^* u) \cdot \nu) dS^*.$$

5. Ytan S är kalottytan till halvsfären, H, av radie 1 över xy-planet. Om vi låter F vara sådan att det inte finns något flöde i z-led i xy-planet (dvs $F(x,y,0)\cdot(0,0,1)=0$ för alla x och y) blir nettoflödet uppåt genom ytan S samma som nettoflödet ut ur hela H och enligt Gauss divergenssats blir detta nettoflöde
$$\int\int\int_H divF dxdydz.$$
Om nu $divF$ är konstant, $divF = c$, får vi alltså att nettoflödet blir $c \cdot vol(H) = 2\pi c/3$ så om $c = 3/(2\pi)$ har vi ett önskat flöde. Detta kan vi åstadkomma genom att exempelvis låta $F(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}(x,y,z)$ och eftersom F då också uppfyller kravet att sakna flöde i z-led då $z=0$ är detta ett F av önskat slag.

/Johan Jonasson