Matematik Chalmers

Tentamen i Tillämpad matematik K2, tma681, onsdagen den 28 augusti 2002 kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

Telefonvakt: Anton Evgrafov, tel. 0740-459022.

1. (10p) Låt $f(t)$ vara en periodisk funktion med period 2π sådan att

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

   (a) Beräkna f's Fourierserie.

   (b) Beräkna serien $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$.

   (c) Beräkna serien $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$.

2. (10p) Tankreaktorn. Mass- och värmebalansekvationerna för tankreaktorn på dimensionslös form ser ut på följande sätt:

$$\frac{dX_1}{ds} = U_1(1 - X_1) - X_1 f(X_2)$$

$$\frac{dX_2}{ds} = U_1(1 - X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2)$$

   där $f(x) = \delta \exp(\gamma x/(1 + x))$ och α, β, γ och δ är konstanter som beror av processens ingående parametrar.

   (a) För vilka (dimensionlösa) fysikaliska storheter står X_1, X_2, U_1 och U_2?

   (b) Antag att vi har bestämt ett jämviktsläge $(\bar{X}, \bar{U})$. Linjärisera kring detta jämviktsläge och skriv ner det linjäriserade systemet.

   (c) Hur kan man bestämma stabiliteten hos jämviktsläget $(\bar{X}, \bar{U})$?

3. (10p) Vad är egenvärdena hos den 3×3-matris vars kvadratiska form $f(x, y, z)$ via ekvationen $f(x, y, z) = 1$ beskriver

   (a) två parallella plan på inbördes avstånd 6?

   (b) en sfär av radie 1?

   I del (b), ange även matrisen.

4. (10p) Katalysatorn. Ett ämne i gasform diffunderar in i en porös katalysatorpellet V med begränsningsyta S under stationära och isoterma förhållanden. Detta leder till reaktions- diffusionsekvationen:

$$\begin{cases} -div(D \bigtriangledown c) = -kc & \text{i} \quad V \\ c = c_f & \text{på} \quad S \end{cases} \tag{1}$$

(a) Inför de dimensionslösa koordinaterna $(x^*, y^*, z^*) = (x/L, y/L, z/L)$, $u = c/c_f$, $k^* = k/k_{ref}$ och $D^* = D/D_{ref}$ och visa att (1) transformerar sig till

$$\begin{cases} -div^*(D^* \bigtriangledown^* u) = -\phi^2 k^* u & \text{i} \quad V^* \\ u = 1 & \text{på} \quad S^* \end{cases} \tag{2}$$

där $V^* = \{(x^*, y^*, z^*); (x, y, z) \in V\}$, S^* är begränsningsytan till V^* och ϕ är Thielemodulen $L\sqrt{k_{ref}/D_{ref}}$.

(b) Definiera den s.k. effektivitetsfaktorn, η, som

$$\eta = \frac{1}{vol^*(V^*)} \int\int\int_{V^*} k^* u dx^* dy^* dz^*.$$

Tolka η fysikaliskt och visa med hjälp av (2) och Gauss divergenssats att

$$\eta = \frac{1}{\phi^2 vol^*(V^*)} \int\int_{S^*} ((D^* \bigtriangledown^* u) \cdot \nu) dS^*$$

där ν är en utåtriktad enhetsnormalvektor till S^*.

5. (10p) Specificera en flödeshastighet $F(x, yz) = (X(x, yz), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ i rummet sådant att det uppåtriktade nettoflödet genom ytan S given av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, blir 1.

/Johan Jonasson