Lösningar till tenta 2002-05-25

1. Vi ska hitta $U_1$ och $U_2$ så att $U_1(1-0.5) - 2e^1 = U_1(1-1) + 0.5e^1 + (1-U_2)e = 0$. Den första ekvationen ger att $U_1 = 4e$ och den andra att $U_2 = 1/2$. För att undersöka om jämviktsläget är stabilt beräknar vi egenvärdena hos Jacobimatrisen $A$ m.a.p. $X_1$ och $X_2$ i den stationära punkten. Jacobimatrisen m.a.p. $X_1$ och $X_2$ är allmänt
$$\begin{bmatrix} -U_1 & -2e^{X_2} \\ e^{X_2} & -U_1 + X_1 e^{X_2} - e \end{bmatrix}$$
så att
$$A = \begin{bmatrix} -4e & -2e \\ e & -\frac{9}{2}e \end{bmatrix}.$$
Egenvärdena till $A$ är $(-17 \pm i\sqrt{31})e/4$, som båda har negativ realdel, varför vi kan dra slutsatsen att det funna jämviktsläget är stabilt om bara störningarna i styr- och tillståndsvaribler inte blir för stora.

2. (a) Detta är värmeledning i en lång cylinder med isolerad mantelyta, längs $x$-axeln med vänster ände i origo och höger ände i i punkten $x = \pi$. Den dimensionlösa källtätheten i punkten $x$, $0 < x < \pi$, är $\sin x$. Randvillkoren talar om att omgivningens dimensionlösa temperatur är 0 och att värmeöverföringskoefficienten är $1/2$ i vänster ände och 1 i höger ände (dvs högeränden är något sämre isolerad än vänsteränden).

   (b) Vid stationaritet gäller att $u"_t = 0$ så vi har att lösa
   $$u''_{xx} = -\sin x$$
   med de givna randvillkoren. Den allmänna lösningen är $u(x) = \sin x + Cx + D$. Det första randvillkoret säger att $2(1+C) = D$ och det andra att $1 - C = D + C\pi$. Tillsammans ger detta att $C = -1/(\pi+3)$ och $D = 2(\pi+2)/(\pi+3)$ så att
   $$u(x) = \sin x - \frac{1}{\pi+3}x + 2\frac{\pi+2}{\pi+3}.$$

3. (a) Vi börjar med att observera att
   $$D^* \bigtriangledown^* u = D^*(\frac{\partial u}{\partial x^*}, \frac{\partial u}{\partial y^*}, \frac{\partial u}{\partial z^*}) = \frac{DL}{c_f D_{ref}}(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$$
   $$= \frac{DL}{c_f D_{ref}} \bigtriangledown c.$$
   Därför gäller att
   $$div^*(D^* \bigtriangledown^* u) = \frac{L}{c_f D_{ref}} div^*(D \bigtriangledown c) = \frac{L^2}{c_f D_{ref}} div(D \bigtriangledown c)$$
   $$\frac{L^2 kc}{c_f D_{ref}} = \frac{L^2 k_{ref}}{D_{ref}} k^* u = \phi^2 k^* u.$$

(b) Enligt (2) gäller att $k^* u = \frac{1}{\phi^2} div^*(D^* \bigtriangledown^* u)$ så att

$$\eta = \frac{1}{\phi^2 vol^*(V^*)} \int\int\int_{V^*} div^*(D^* \bigtriangledown^* y) dx^* dy^* dz^*.$$

Av Gauss divergenssats följer då att

$$\eta = \frac{1}{\phi^2 vol^*(V^*)} \int\int_{S^*} ((D^* \bigtriangledown^* u) \cdot \nu) dS^*.$$

4. Låt $q(x,y)$ vara den kvadratiska formen som beskrivs av $A$. Vi är intresserade av ekvationen $q(x,y) = c$ som ska beskriva an ellips av angiven sort. Eftersom $c$ inte är givet står det oss fritt att välja, så låt oss betrakta ekvationen $q(x,y) = 1$. Ekvationens kanoniska form är

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 1$$

där $\lambda_1$ och $\lambda_2$ är $A$'s. Enligt uppgift ska det gälla att $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 1/4$ och att $\xi$-axeln har rikting $(1,2)^t$ och att $\eta$-axeln har riktning $(-2,1)^t$. Eftersom huvudaxlarna riktingar anges av motsvarande egenvektorer för $A$ gäller att $A$ har enhetsegenvektorer $g_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^t$ repsektive $g_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$. Vi får nu $A$ via $A = PDP^t$ där $P$ har $g_1$ och $g_2$ som kolonner och $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$. Således:

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$$

Det är värt att notera att om man väljer ett annat $c$ än 1 kommer den erhållna matrisen att skilja sig från den här angivna endast via den multiplikativa konstanten $\sqrt{c}$.

5. Se lösningen till tentan 010519, uppgift 4.

6. (a) Eftersom $f(t)$ är en udda funktion med period $2\pi$ gäller att $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ och att

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt dt = \frac{1}{n\pi}([-t \cos nt]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

varför

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt.$$

(b) Här finns tyvärr ett feltryck på tentamenstesen. Serien man ska beräkna är $x = 1-1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+\ldots$. Om man sätter $t = \pi/2$ och använder Fourierserien för $f(t)$ får man att $\pi/2 = 2x$ varför $x = \pi/4$.

Det går även att beräkna den serie som felaktigt angivits på tesen: $y = 1 - 1/3 - 1/5 + 1/7 - 1/9 + 1/11 - \ldots$. Sånär som på de första två termerna är detta serien $-x$. Med hänsyn tagen till första två termerna inser man raskt att $y = 4/3 - x$ så att $y = 4/3 - \pi/4$.

(c) Enligt Parsevals formel gäller att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

dvs att

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

varför

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

/Johan Jonasson