Matematik Chalmers

Tentamen i Tillämpad matematik K2, tma681, lördagen den 25 maj 2002 kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

Telefonvakt: Yan Yubin, tel. 0740-459022

1. (8p) I följande dynamiska system är X_1 och X_2 tillståndsvariabler och U_1 och U_2 är styrvariabler. Bestäm styrvariablerna så att ett jämviktsläge uppnås då $X_1 = 0.5$ och $X_2 = 1$. Avgör också om detta jämviktsläge är stabilt:

$$\begin{cases} X_1'(t) = U_1(1 - X_1) - 2e^{X_2} \\ X_2'(t) = U_1(1 - X_2) + X_1 e^{X_2} - e(X_2 - U_2) \end{cases}$$

2. (8p) Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t' - u_{xx}'' = \sin x, & 0 < x < \pi \\ u_x' = \frac{1}{2}u, & x = 0 \\ u_x' = -u, & x = \pi \end{cases}$$

   (a) Vilken fysikalisk situation beskrivs av denna ekvation?

   (b) Bestäm den stationära lösningen.

3. (10p) Katalysatorn. Ett ämne i gasform diffunderar in i en porös katalysatorpellet V med begränsningsyta S under stationära och isoterma förhållanden. Detta leder till reaktions- diffusionsekvationen:

$$\begin{cases} -div(D \bigtriangledown c) = -kc & \text{i} \quad V \\ c = c_f & \text{på} \quad S \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Inför de dimensionslösa koordinaterna $(x^*, y^*, z^*) = (x/L, y/L, z/L)$, $u = c/c_f$, $k^* = k/k_{ref}$ och $D^* = D/D_{ref}$ och visa att (1) transformerar sig till

$$\begin{cases} -div^*(D^* \bigtriangledown^* u) = -\phi^2 k^* u & \text{i} \quad V^* \\ u = 1 & \text{på} \quad S^* \end{cases} \tag{2}$$

   där $V^* = \{(x^*, y^*, z^*); (x, y, z) \in V\}$, S^* är begränsningsytan till V^* och ϕ är Thielemodulen $L\sqrt{k_{ref}/D_{ref}}$.

   (b) Definiera den s.k. effektivitetsfaktorn, η, som

$$\eta = \frac{1}{vol^*(V^*)} \int\int\int_{V^*} k^* u dx^* dy^* dz^*.$$

   Tolka η fysikaliskt och visa med hjälp av (2) och Gauss divergenssats att

$$\eta = \frac{1}{\phi^2 vol^*(V^*)} \int\int_{S^*} ((D^* \bigtriangledown^* u) \cdot \nu) dS^*$$

   där ν är en utåtriktad enhetsnormalvektor till S^*.

4. (8p) Konstruera en 2×2-matris A sådan att dess kvadratiska form beskriver en ellips med halvaxlar längs linjerna $y = 2x$ och $x = -2y$ och halvaxellängderna 1 respektive 2.

5. (8p) Förklara vad det innebär geometriskt att tillämpa minsta kvadratmetoden på det överbestämda ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

   där $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ och $m > n$. Förklara också att $\hat{\mathbf{x}}$ löser minsta kvadrat-problemet om och endast om $A^t A\hat{\mathbf{x}} = A^t\mathbf{b}$.

6. (8p) Låt $f(t)$ vara en periodisk funktion med period 2π sådan att $f(t) = t$ då $-\pi < t < \pi$.

   (a) Beräkna f's Fourierserie.

   (b) Beräkna serien $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots$.

   (c) Beräkna serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

/Johan Jonasson