Lösningar till tenta 2002-01-17

1. För att finna de stationära punkterna löser vi

$$\begin{cases} f'_x &= 3x^2+3y^2-15 &= 0 \\ f'_y &= 6xy+3y^2-15 &= 0 \end{cases}$$

   Genom att ta differensen mellan de två ekvationerna fås

$$x^2-2xy = x(x-2y) = 0$$

   som ger att $x=0$ eller $x=2y$.

   Med $x=0$ får man $y=\pm\sqrt{5}$ och med $x=2y$ fås $y=\pm1$ så att $x=\pm2$. De fyra stationära punkterna är alltså $\pm(0,\sqrt{5})$ och $\pm(2,1)$.

   För att nu finna karaktären hos dessa tittar vi nu på $f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2 = 36(x^2+xy-y^2)$ som är negativt i punkterna $\pm(0,\sqrt{5})$ och positivt i $\pm(2,1)$. Härav följer att $\pm(0,\sqrt{5})$ är sadelpunkter coh eftersom $f''_{xx}=6x$ följer också att $(2,1)$ är ett lokalt minimum och att $(-2,-1)$ är ett lokalt maximum.

2. Se pm:et till Studioövning 2.

3. Vi ska finna 4×2-matrisen A sådan att $A\mathbf{x}=F(\mathbf{x})$ för alla $x\in\mathbf{R}^2$. Skriv $A=[a_1a_2]$ dvs låt a_1 och a_2 vara A's kolonnvektorer.

   I uppgiften anges att $-a_1+3a_2=(2,2,0,2)^t$ och att $2a_1=(-1,-1,-1,1)^t$. Således blir $a_1=\frac{1}{2}(-1,-1,-1,1)^t$ och $a_2=\frac{1}{3}((2,2,0,2)^t+a_1)=\frac{1}{6}(3,3,-1,5)^t$. Alltså är

$$A=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \\ -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. (a) u står för temperatur i $\mathcal{V}$, u_a betecknar omgivningens temperatur, f är källtäthet medan h betecknar väremöverföringskoefficient, dvs hur stort värmeutbyte som sker mellan $\mathcal{V}$'s yta och omgivningen.

   (b) Man betraktar här $\mathcal{V}$ som "endimensionellt", dvs allt beroende av y och z försvinner. Ekvation (1) blir då

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}-u''_{xx} &= f \\ u'_x(1)+h(1)(u(1)-u_a(1)) &= 0 \\ -u'_x(0)+h(0)(u(0)-u_a(0)) &= 0 \end{cases}$$

   (c) Vi har $-u''=1$ så att $u(x)=-x^2/2+Cx+D$ där C och D ges av randvillkoren, dvs $u'(1)+u(1)=2C+D-1=0$ och $-u'(0)+u(0)=-C+D=0$, dvs $C=D=1/2$, dvs

$$u(x)=\frac{1+x-x^2}{2}.$$

5. Man ska beräkna normalytintegralen

$$\int\int_{\partial K}(F(x,y,z)\cdot\eta(x,y,z))dS$$

där ∂K är begränsningsytan till K och η är en utåtriktad enhetnormalvektor till ∂K i (x,y,z).

Eftersom K är ett begränsat område kan vi använda Gauss divergenssats och få att den sökta integralen är

$$\int\int\int_K (divF)dxdydz = \int\int\int_K 2dxdydz$$

$$= 2\int_0^4 (\int\int_{x^2+y^2\leq z} dxdy)dz = 2\int_0^4\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} rd\theta drdz$$

$$= 2\pi\int_0^4 zdz = 16\pi.$$

/Johan Jonasson