Matematik Chalmers

Tentamen i Tillämpad matematik K2, tma681, torsdagen den 17 januari 2002 kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

Telefonvakt: Anders Logg, tel. 0740-459022

1. (10p) Undersök funktionen

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$$

med avseende på lokala maxima, lokala minima och sadelpunkter.

2. (10p) Tankreaktorn. Visa att massbalansekvationen

$$V\frac{dc}{dt} = q(c_f - c) - ckV$$

via införandet av variablerna $\tau = V/q_{\text{ref}}$, $s = t/\tau$, $X = c/c_f$ och $U = q/q_{\text{ref}}$ transformerar sig till

$$\frac{dX}{ds} = -(k\tau + U)X + U.$$

Bestäm $X(s)$ då $U = 0$. Bestäm $X(s)$ då $U = \bar{U}$ är konstant. Visa att lösningen i detta fall går mot ett stationärt tillstånd $X(s) \to \bar{X}$ då $s \to \infty$? Bestäm $\bar{X}$. Vad betyder detta fysikaliskt? Hur ska $\bar{U}$ väljas för att $\bar{X}$ ska bli 0.5?

3. (10p) Låt $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ vara den linjära transformation som ges av att $(-1, 3)$ avbildas på $(2, 2, 0, 2)$ och $(2, 0)$ på $(-1, -1, -1, 1)$. Ange matrisen för F.

4. (10p) Värmeledningsekvationen på dimensionslös form ser ut så här:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \ (x, y, z) \in \mathcal{V} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + h(u - u_a) = 0, \ (x, y, z) \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{1}$$

där $u = u(x, y, z; t)$, $f = f(x, y, z; t)$, $u_a = u_a(x, y, z; t)$, $h = h(x, y, z)$, $\mathcal{V}$ är ett område i rummet med $\mathcal{S}$ som begränsningsyta och η är en enhetsnormalvektor till $\mathcal{S}$.

   (a) För vilka fysikaliska begrepp står u, f, u_a och h?

   (b) Vilket utseende får (1) när $\mathcal{V}$ är en lång cylinder längs x-axeln, dvs $y^2 + z^2 \leq r$ där r är "litet" och $0 \leq x \leq 1$?

   (c) Låt $f = 1$, $h = 1$ och $u_a = 0$. Eftersom f ej beror av tiden uppnås då $t \to \infty$ en stationär lösning som ges av

$$-\Delta u = 1.$$

   Ge en explicit lösning till detta problem i fallet då $\mathcal{V}$ är en lång cylinder.

5. (10p) Vätska flödar genom rummet med en flödeshastighet som i varje punkt (x, y, z) ges av $F(x, y, z) = (x, y, 3)$. Beräkna flödet ut ur området $K : x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

/Johan Jonasson