Lösningar till tenta 2001-08-29

1. För att hitta de stationära punkterna löser vi

$$f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$$

dvs

$$4x^3 - 4y = 4y^3 - 4x = 0$$

och får lösningarna $(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (1,1)$ och $(x,y) = (-1,-1)$. Bilda nu Hessematrisen

$$S = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

S har egenvärdena

$$6(x^2+y^2) \pm \sqrt{36(x^4+y^4) - 72x^2y^2 + 16}$$

som båda är positiva då (x,y) är (1,1) eller (-1,-1) och har olika tecken då $(x,y) = (0,0)$. Således är $(0,0)$ en sadelpunkt medan (1,1) och (-1,-1) är lokala minima.

2. Se pm:et till Studioövning 2.

3. (a) Effektivitetsfaktorn η är kvoten mellan den verkliga reaktionshastigheten i katylsatorpelleten och den rektionshastighet som skulle uppnås under ideala förhållanden med mycket snabb diffusion in i pelleten så att den i sin helhet skulle utnyttjas fullt ut.

$$\eta = \frac{\int\int\int_{\mathcal{V}} kcdxdydz}{k_{ref}c_f V} = \frac{1}{\mathcal{V}^*}\int\int\int_{\mathcal{V}^*} k^* u dx^* dy^* dz^*$$

där $\mathcal{V}$ är katalysatorpelletens utbredning i rummet och V är volymen av $\mathcal{V}$ och $u = c/c_f$, $k^* = k/k_{ref}$, $(x^*, y^*, z^*) = (x/L, y/L, z/L)$.

(b) $u''(r) = \phi^2 u(r) \Rightarrow u(r) = A\cosh(\phi r) + B\sinh(\phi r)$ och med hjälp av randvillkoren $u(1) = A\cosh(\phi) + B\sinh(\phi) = u(-1) = A\cosh(\phi) - B\sinh(\phi) = 1$ ser vi att $B = 0$ och att $A = 1/\cosh(\phi)$. Således är

$$u(r) = \frac{\cosh(\phi r)}{\cosh(\phi)}.$$

Därmed blir

$$\eta = \frac{1}{\mathcal{V}^*}\int\int\int_{\mathcal{V}} u dx^* dy^* dz^* = \frac{1}{2\cosh(\phi)}\int_{-1}^{1}\cosh(\phi r)dr = \frac{\tanh(\phi)}{\phi}.$$

(c) Ett område nära katalysatrons rand har mycket låg reaktionshastighet, dvs $k^*(x,y,z) << 1$ för $(x,y,x) \in \mathcal{V}_0$ där $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ ligger nära randen till $\mathcal{V}$.

4. Eftersom $f(t)$ har period 2π gäller att

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

och

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Först konstaterar vi att om a är ett heltal är Fourierserien helt enkelt $f(t)$ själv, dvs $\cos(at)$, så antag i fortsättningen att a inte är ett heltal.

Nu är ju $f(t)$ en jämn funktion så alla b_n blir 0 så vi kan koncentrera oss på a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(at)dt = \frac{1}{\pi a}[\sin(at)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sin(at)}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(at)\cos(nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+a)t) + \cos((n-a)t))dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{n+a}[\sin((n+a)t)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n-a}[\sin((n-a)t)]_{-\pi}^{\pi})$$

$$= \frac{\sin((n+a)\pi)}{(n+a)\pi} + \frac{\sin((n-a)\pi}{(n-a)\pi}$$

$$= \frac{\sin(a\pi)\cos(n\pi)}{(n+a)\pi} - \frac{\sin(a\pi)\cos(n\pi)}{(n-a)\pi} = \frac{2a\sin(a\pi)\cos(n\pi)}{(a^2-n^2)\pi}$$

$$= \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}\cdot 2a^2 \cdot \frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

Vi får:

$$\cos(at) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}(1 + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{a^2-n^2}).$$

För att lösa den andra delen av uppgiften sätter vi $t = 0$ och får

$$1 = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}(1 + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}) = [x = a\pi, a = x/\pi]$$

$$= \frac{\sin x}{x}(1 + \frac{2x^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2/\pi^2 - n^2})$$

$$= \sin x(\frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2 - n^2\pi^2})$$

och det vi skulle visa följer genom division av bägge sidor med $\sin x$.

5. Nollrummet ges av

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : A\mathbf{x} = 0\}$$

dvs alla lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = 0$. Vi löser genom Gausseliminering:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 6 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 9 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs $A\mathbf{x} = 0$ är ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 & = & 0 \\ x_2 + 5x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} x_1 & = & -4t \\ x_2 & = & -5t \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & t \end{cases}$$

dvs

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att $\{(-4, -5, 0, 1)^t\}$ utgör en bas för $N(A)$.

Tydligen har nollrummet dimensionen 1 så enligt dimensionssatsen måste vi ha att dimensionen för kolonnrummet är $4 - dim(N(A)) = 3$ och eftersom Pivotelementen i Gausselimineringen ovan hamnade i kolonnerna 1, 2 och 3 måste dessa kolonner från början ha varit oberoende. Således är $\{(2, 1, -1)^t, (-1, 0, 1)^t, (-3, 3, 6)\}$ en bas för kolonnrummet.

/Johan Jonasson