Lösningar till tenta 2001-05-19

1. Detta är en kvadratisk form $f(x,y) = (x\ y)A\binom{x}{y}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena till A fås från den karaktäristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 1/4 = \lambda^2 - 3\lambda + 7/4 = 0$ vilket ger

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Eftersom bägge egenvärdena är positiva beskriver ekvationen $f(x,y) = 1$ en ellips, vilket alltså är svaret i uppgift (a).

I uppgift (b) använder vi satsen som säger att

$$\lambda_{min}(x^2 + y^2) \leq f(x,y) \leq \lambda_{max}(x^2 + y^2)$$

som vid förkortning med $x^2 + y^2$ ger

$$\lambda_{min} \leq \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} \leq \lambda_{max}$$

där likhet antas då $\binom{x}{y}$ är en egenvektor till respekive egenvärde. Således ges största och minsta värde av de bägge egenvärdena $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{2})$ och $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{2})$.

2. (a)

$$\frac{dX_1}{ds} = \frac{\tau}{c_f}\frac{dc}{dt} = \frac{\tau q}{c_f V}(c_f - c) - \frac{\tau}{c_f V}ckV$$

$$= \frac{\tau q_{ref}}{V}U_1(1 - X_1) - X_1 k\tau = (\text{här ser vi att } \tau = V/q_{ref})$$

$$= U_1(1 - X_1) - X_1 k_0 \tau e^{-E/(RT)} = U_1(1 - X_1) - X_1 f(X_2)$$

och

$$\frac{dX_2}{ds} = \frac{\tau}{T_f}\frac{dT}{dt} = \frac{\tau q}{T_f V}(T_f - T) + \frac{\tau(-\delta H)}{T_f \rho c_p}ck - \frac{\tau\kappa A_K}{T_f \rho c_p V}(T - T_K)$$

$$= \frac{\tau q_{ref}}{V}U_1(1 - X_2) + \frac{(-\delta H)c_f}{\rho c_p T_f}X_1 k\tau - \frac{\tau\kappa A_K}{\rho c_p V}(X_2 - U_2)$$

$$= U_1(1 - X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2).$$

(b) Vi ska lösa

$$\begin{cases} U_1(1-X_1) - X_1 f(X_2) & = & 0 \\ U_1(1-X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2) & = & 0 \end{cases}$$

Vi får att

$$U_1 = \frac{X_1 f(X_2)}{1-X_1} = \frac{0.5 \cdot 1.5}{0.5} = 1.5$$

och att

$$U_2 = X_2 - \frac{1}{\beta}(U_1(1-X_2) + \alpha X_1 f(X_2)) = 1.1 - \frac{0.075}{\beta}.$$

(c) Det linjäriserade systemet $\mathbf{x}'(s) = A\mathbf{x}(s) + B\mathbf{u}(s)$ kring $(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ fås genom att sätta

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} -U_1 - f(X_2) & -X_1 f'(X_2) \\ \alpha f(X_2) & -U_1 + \alpha X_1 f'(X_2) - \beta \end{bmatrix}$$

och

$$B = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{X}, \mathbf{U}).$$

Observera att $f'(x) = \gamma f(x)/x^2$. För att avgöra när systemet är stabilt bestämmer vi A's egenvärden. Vi har att

$$A \approx \begin{bmatrix} -3 & -18 \\ 0.45 & 3.9 - \beta \end{bmatrix}$$

så att den karaktäristiska ekvationen blir

$$(\lambda + 3)(\lambda + \beta - 3.9) + 8.1 = \lambda^2 + (\beta - 0.9)\lambda + 3(\beta - 1.2) = 0$$

som ger egenvärdena

$$\lambda = -\frac{1}{2}(\beta - 0.9) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\beta - 0.9)^2 - 3(\beta - 1.2)}$$

och vi ser genom inspektion av detta uttryck att (realdelarna till) egenvärdena blir negativa ungefär då $\beta > 1.2$ vilket också är när stabilitet uppnås.

För att i praktiken öka β kan man öka kontaktytan mellan kylvattentanken och reaktorn. Man skulle också kunna tänka sig att göra tanken i ett mindre isolerande material; detta ökar κ.

3. (a) Effektivitetsfaktorn η är kvoten mellan den verkliga reaktionshastigheten i katylsatorpelleten och den rektionshastighet som skulle uppnås under ideala förhållanden med mycket snabb diffusion in i pelleten så att den i sin helhet skulle utnyttjas fullt ut.

$$\eta = \frac{\int\int\int_{\mathcal{V}} kc dx dy dz}{k_{ref} c_f V} = \frac{1}{\mathcal{V}^*} \int\int\int_{\mathcal{V}^*} k^* u dx^* dy^* dz^*$$

där $\mathcal{V}$ är katalysatorpelletens utbredning i rummet och V är volymen av $\mathcal{V}$ och $u = c/c_f$, $k^* = k/k_{ref}$, $(x^*, y^*, z^*) = (x/L, y/L, z/L)$.

(b) $u''(r) = \phi^2 u(r) \Rightarrow u(r) = A\cosh(\phi r) + B\sinh(\phi r)$ och med hjälp av randvillkoren $u(1) = A\cosh(\phi) + B\sinh(\phi) = u(-1) = A\cosh(\phi) - B\sinh(\phi) = 1$ ser vi att $B = 0$ och att $A = 1/\cosh(\phi)$. Således är

$$u(r) = \frac{\cosh(\phi r)}{\cosh(\phi)}.$$

Därmed blir

$$\eta = \frac{1}{\mathcal{V}^*}\int\int\int_{\mathcal{V}} u dx^* dy^* dz^* = \frac{1}{2\cosh(\phi)}\int_{-1}^{1}\cosh(\phi r)dr = \frac{\tanh(\phi)}{\phi}.$$

(c) Ett område nära katalysatrons rand har mycket låg reaktionshastighet, dvs $k^*(x,y,z) << 1$ för $(x,y,x) \in \mathcal{V}_0$ där $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ ligger nära randen till $\mathcal{V}$.

4. Man får $A\hat{\mathbf{x}}$ genom att ortogonalprojicera $\mathbf{b}$ på A's kolonnrum. Eftersom $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ då måste vara ortogonal mot alla vektorer av typen $A\mathbf{v}$ får vi att

$$0 = A\mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{v}^t A^t(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{v}^t(A^t\mathbf{b} - A^t A\hat{\mathbf{x}})$$

och eftersom detta gäller för alla $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ följer att $A^t\mathbf{b} - AtA\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, vilket skulle visas.

5. Eftersom f har perioden 2π blir Fourierserien

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}\infty(a_n\cos nt + b_n \sin nt)$$

där

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos nt dt = \frac{1}{\pi n}([t^2\sin nt]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt dt) \\ &= \frac{2}{\pi n^2}([t\cos nt]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-pi}^{\pi}\cos nt dt) = 4\frac{(-1)^n}{n^2}, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin nt dt = 0.$$

Alltså är

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt.$$

I uppgift (b) utnyttjar vi att $0 = f(0) = \pi^2/3 - 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-2}$ ur vilket vi löser ut serien och får att

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

I uppgift (c) utnyttjar vi istället Parsevals formel som säger att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

ur vilket den intressanta serien löses ut:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

/Johan Jonasson