Matematik Chalmers

Tentamen i Tillämpad matematik K2, tma681, lördagen den 19 maj 2001 kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

Telefonvakt: Robert Bohlin, tel. 0740-459022

1. (6p) Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$.

   (a) Vilken är den geometriska betydelsen av ekvationen $f(x,y) = 1$?

   (b) Beräkna största och minsta värdet av $f(x,y)/(x^2 + y^2)$.

2. (14p) Tankreaktorn. Mass- och värmebalansekvationerna

$$V\frac{dc}{dt} = q(c_f - c) - ckV$$

$$\rho c_p V\frac{dT}{dt} = \rho c_p q(T_f - T) + (-\delta H)Vck - \kappa A_K(T - T_K)$$

   där enligt Arrhenius lag $k = k_0 \exp(-E/(RT))$, beskriver hur ett ämne omsätts i en kemisk reaktion i en tankreaktor delvis nedsänkt i en stor kylvattentank.

   (a) Inför de dimensionslösa storheterna $s = t/\tau$, $X_1 = c/c_f$, $U_1 = q/q_{ref}$, $X_2 = T/T_f$, $U_2 = T_K/T_f$ och konstanterna

$$\alpha = \frac{(-\delta H)c_f}{\rho c_p T_f}, \beta = \frac{\kappa A_K}{\rho c_p q_{ref}}, \gamma = \frac{E}{RT_f}, \delta = k_0\tau e^{-\gamma}$$

   och visa hur mass- och värmebalansekvationerna transformerar sig till

$$\frac{dX_1}{ds} = U_1(1 - X_1) - X_1 f(X_2)$$

$$\frac{dX_2}{ds} = U_1(1 - X_2) + \alpha X_1 f(X_2) - \beta(X_2 - U_2)$$

   där $f(x) = \delta \exp(\gamma - \gamma/x)$.

   (b) Antag att man har bestämt α, γ och δ till 0.3, 30 respektive 0.1. Bestäm styrvariablerna $\bar{U}_1$ och $\bar{U}_2$ som funktioner av β så att systemet får en stationär lösning vid $\bar{X}_1 = 0.5$ och $\bar{X}_2 = 1.1$.

   (c) Linjärisera systemet kring den stationära lösningen i (b). För vilka värden på β är den stationära lösningen stabil? Vad betyder restriktionen på β fysikaliskt? (dvs hur kan vi praktiken uppnå stabilitet?)

   Tips: Räkna approximativt i (b) och (c). Exempelvis gäller att $f(1.1) \approx 1.5$ och $30/1.1 \approx 27$. (Om du har ont om tid ger det viss utdelning att i (c) endast avgöra om stabilitet fås för stora respektive små värden på β.)

3. (10p) Katalysatorn.

(a) Definiera effektivitetsfaktorn η dels med ord, dels med en matematisk formel. Ange även en formel på dimensionslös form.

(b) Katalysatorn i platt geometri med konstanta koefficienter för reaktionshastighet och diffusion beskrivs på dimensionslös form av

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} = \phi^2 u(r), \ -1 < r < 1$$

$$u(-1) = u(1) = 1.$$

Lös detta randvärdesproblem och beräkna η.

(c) Förklara dels i ord, dels med en matematisk formel, vad som menas med förgiftning av katalysatorn.

4. (10p) Förklara vad det innebär geometriskt att tillämpa minsta kvadratmetoden på det överbestämda ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

där $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ och $m > n$. Förklara också att $\hat{\mathbf{x}}$ löser minsta kvadrat-problemet om och endast om $A^t A\hat{\mathbf{x}} = A^t\mathbf{b}$.

5. (10p) Låt $f(t)$ vara en periodisk funktion med period 2π sådan att $f(t) = t^2$ då $-\pi < t < \pi$.

(a) Beräkna f's Fourierserie.

(b) Beräkna serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-2}$.

(c) Beräkna serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$.

/Johan Jonasson