TMA681 Tillämpad matematik K, 2001–01–12. Lösningar.

---

1. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 2x - yz = 0, \\ f'_y(x,y,z) &= 2y - xz = 0, \\ f'_z(x,y,z) &= 2z - xy = 0. \end{aligned}$$

Multiplikation av ekvationerna med x, y, respektive z ger att $xyz = 2x^2 = 2y^2 = 2z^2$. Detta ger att $x^2 = y^2 = z^2$. En möjlighet är att $x = y = z$, vilket insatt i första ekvationen ger $2x - x^2 = 0$, med lösningarna $x = 0$ och $x = 2$. Vi har nu hittat två stationära punkter: $(0,0,0)$ och $(2,2,2)$. Vi undersöker dem. (Andra stationära punkter äro $(2,-2,-2)$, $(-2,-2,2)$, $(-2,2,-2)$.) Hessematrisen är

$$\begin{aligned} f''(x,y,z) &= \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -z & -y \\ -z & 2 & -x \\ -y & -x & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

I punkten $(0,0,0)$ får vi

$$f''(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena 2, 2, 2, dvs den är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(0,0,0)$ är en lokal minimipunkt.

I punkten $(2,2,2)$ får vi

$$f''(2,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena 4, 4, -2, dvs den är indefinit. Vi drar slutsatsen att $(2,2,2)$ är en sadelpunkt.

2. De stationära lösningarna ges av ekvationssystemet

$$X_2(1 - X_1^2) = 0 \tag{1}$$

$$2 - X_1 X_2 = 0 \tag{2}$$

med två lösningar $(X_1, X_2) = (1,2)$ och $(X_1, X_2) = (-1,-2)$. Jacobimatrisen är

$$\begin{bmatrix} -2X_1X_2 & 1 - X_1^2 \\ -X_2 & -X_1 \end{bmatrix}.$$

Linjärisering kring $(X_1, X_2) = (1,2)$ leder till det linjära systemet

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

vars matris har negativa egenvärden -4 och -1, och alltså är stabilt. Linjärisering kring $(X_1, X_2) = (-1,-2)$ leder till systemet

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Egenvärdena är -4 och 1 och systemet är instabilt.

3. Vi har

$$u'_x = t^a \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right)\left(-\frac{2x}{bt}\right) = -\frac{2x}{bt}u, \quad u'_y = -\frac{2y}{bt}u,$$
$$u''_{xx} = -\frac{2}{bt}u + \left(-\frac{2x}{bt}\right)^2 u = \left(-\frac{2}{bt} + \frac{4x^2}{b^2t^2}\right)u,$$

och analogt för u''_{yy}. Addition av dessa ger

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \left(-4\frac{1}{bt} + 4\frac{x^2+y^2}{b^2t^2}\right)u.$$

Dessutom har vi

$$u'_t = at^{a-1}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right) + t^a \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{bt}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{bt^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a}{t} + \frac{x^2+y^2}{bt^2}\right)u.$$

Insättning i ekvationen $u'_t = u''_{xx} + u''_{yy}$ ger $a = -1$, $b = 4$.

4. (a) Energibalansekvationerna är

$$\frac{d}{dt}(\rho c_p V T) = \rho c_p q(T_f - T) - \kappa A(T - T_K),$$
$$\frac{d}{dt}(\rho c_p V_K T_K) = \rho c_p q_K(T_{Kf} - T_K) + \kappa A(T - T_K).$$

(b) Båda ekvationerna divideras med $\rho c_p q T_f$. Med $\tau = V/q$ får vi

$$\tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{T_f - T}{T_f} - \frac{\kappa A\tau}{\rho c_p V}\frac{T - T_K}{T_f},$$
$$\tau\frac{V_K}{V}\frac{d}{dt}\Big(\frac{T_K}{T_f}\Big) = \frac{q_K}{q}\frac{T_{Kf} - T_K}{T_f} + \frac{\kappa A\tau}{\rho c_p V}\frac{T - T_K}{T_f}.$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau, \quad X_1(s) = \frac{T(s\tau)}{T_f}, \quad X_2(s) = \frac{T_K(s\tau)}{T_f}, \quad U(s) = \frac{q_K(s\tau)}{q}$$

och dimensionslösa konstanterna

$$Z = \frac{T_{Kf}}{T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A\tau}{\rho c_p V}, \quad \epsilon = \frac{V}{V_K}, \quad \tau = \frac{V}{q},$$

får vi det ickelinjära differentialekvationssystemet (kedjeregeln: $\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{dt}\frac{dt}{ds} = \tau\frac{dX}{dt}$)

$$\frac{dX_1}{ds} = 1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2) \qquad (\,= F_1(X,U)\,),$$
$$\frac{dX_2}{ds} = \epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2) \qquad (\,= F_2(X,U)\,).$$

(c) Jämviktsekvationerna är

$$1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2) = 0,$$
$$\epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2) = 0.$$

Vi antar att $\bar{X}_1$ är given. Den första ekvationen ger då

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 - (1 - \bar{X}_1)/\beta.$$

Den andra ekvationen ger sedan

$$\bar{U} = \beta\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\bar{X}_2 - Z} = \frac{1 - \bar{X}_1}{\bar{X}_1 - Z - (1 - \bar{X}_1)/\beta}.$$

Obs att $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0$, så att för $\bar{U} > 0$ krävs att $\bar{X}_2 - Z > 0$, dvs $\beta > (1 - \bar{X}_1)/(\bar{X}_1 - Z)$. Alltså: β måste vara större än detta kritiska värde för att denna jämvikt ska vara möjlig.

(d) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatriserna

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\beta & \beta \\ \epsilon\beta & -\epsilon(\bar{U}+\beta) \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial U}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial U}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon(Z - \bar{X}_2) \end{bmatrix}.$$

Lösningen $x(t)$ till det linjäriserade ekvationssystemet är approximation till störningen $\Delta X(t)$ av jämviktsläget, orsakad av en störning av begynnelsetillståndet $\Delta X_0 = x_0$ och en störning av styrvariabeln $\Delta U(t) = u(t)$. Vi har alltså sambanden $X(t) = \bar{X} + \Delta X(t) \approx \bar{X} + x(t)$, $X_0 = \bar{X} + \Delta X_0 = \bar{X} + x_0$, $U(t) = \bar{U} + \Delta U(t) = \bar{U} + u(t)$.

(e) Med (för enkelhets skull) $\bar{U} = 1$, $\epsilon = 1$ får vi

$$A = \begin{bmatrix} -1-\beta & \beta \\ \beta & -1-\beta \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - 2\beta$. Eftersom båda är negativa drar vi slutsatsen att det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt.

`/stig`