Matematik Chalmers

Tentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, 2001–01–12

Telefon: Martin Adiels, 0740–459022 (Stig Larsson, 070–6056247)
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

---

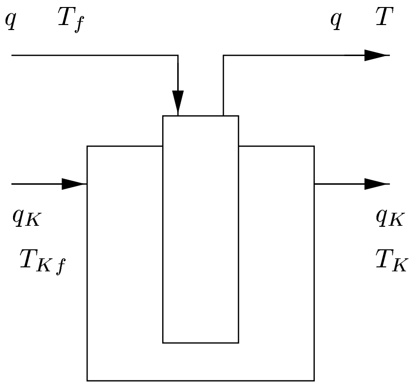
1. Undersök funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ med avseende på lokala maxima, mininima eller sadelpunkter. Det räcker om du undersöker två av de stationära punkterna. Tips: matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärdena $-2,\ 4,\ 4$.

2. Bestäm de stationära lösningarna till systemet

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= X_2(t)\big(1 - X_1(t)^2\big), \\ X_2'(t) &= 2 - X_1(t)X_2(t). \end{aligned}$$

Linjärisera kring de stationära lösningarna och undersök de linjäriserade systemens stabilitet.

3. Bestäm koefficienterna a, b så att funktionen $u(x,y,t) = t^a e^{-\frac{x^2+y^2}{bt}}$ uppfyller värmeledningsekvationen $u_t' = u_{xx}'' + u_{yy}''$.



4. Tankreaktorn. Betrakta en (blandad) tankreaktor nedsänkt i en (blandad) kylvattentank med temperaturer och flödeshastigheter enligt figuren. Vi antar att båda vätskeflödena består av rent vatten, dvs vi har **ingen kemisk reaktion**. Temperaturerna T_f (hög) och T_{Kf} (låg) och flödeshastigheten q antas givna. Vi vill styra temperaturen T genom att reglera flödeshastigheten q_K i kylaren.

(a) Ställ upp balansekvationerna för värmeenergi för båda tankarna. Inför och förklara de fysikaliska storheter som du behöver.

(b) Visa hur ekvationerna kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= 1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2), \\ \frac{dX_2}{ds} &= \epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2), \end{aligned}$$

där $X_1 = T/T_f$, $X_2 = T_K/T_f$ är tillståndsvariabler, $U = q_K/q$ är styrvariabel och $s = t/\tau$, medan $Z = T_{Kf}/T_f$, ϵ, β, τ är konstanter. (Ange dessa konstanter.)

(c) Jämvikt. Vi vill att temperaturen X_1 ska ha ett visst värde $\bar{X}_1$. Bestäm värdet $\bar{U}$ på styrvariabeln så att detta uppnås.

(d) Linjärisering. Linjärisera kring ett jämviktsläge $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{U}$. Bestäm det linjäriserade systemet

$$x' = Ax + Bu.$$

Vad är sambandet mellan X, U och x, u? (Illustrera med figur.)

(e) Sätt för enkelhets skull $\bar{U} = 1$, $\epsilon = 1$ i Jacobimatriserna. Undersök sedan det linjäriserade systemets stabilitet.

/stig