**TMA681 Tillämpad matematik K, 2000–08–23. Lösningar.**

---

**1.**

$$
\begin{aligned}
&T = 4,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \\
&b_n = 0 \quad \text{ty } f \text{ är jämn} \\
&a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt \\
&\quad = \left[\frac{\sin\frac{n\pi t}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0 \\
&a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \int_0^1 dt = 1 \\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big) \\
&\quad = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{2} \\
&\quad = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{2}{5\pi}\cos\frac{5\pi t}{2} - \cdots
\end{aligned}
$$

**2.** (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2+1=0$ med rötterna $r=\pm j$. Den allmänna lösningen blir

$$
\begin{aligned}
u(t) &= Ae^{jt} + Be^{-jt} = C\cos(t) + D\sin(t), \quad C = A+B,\ D = j(A-B), \\
u'(t) &= Aje^{jt} - Bje^{-t} = -C\sin(t) + D\cos(t).
\end{aligned}
$$

Begynnelsevillkoren ger

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(0) = C, \\
u_1 &= u'(0) = D,
\end{aligned}
$$

dvs $C = u_0$, $D = u_1$ (eller $A = \frac{1}{2}(u_0 - ju_1)$, $B = \frac{1}{2}(u_0 + ju_1)$). Alltså:

$$
u(t) = u_0\cos(t) + u_1\sin(t) = \tfrac{1}{2}(u_0 - ju_1)e^{jt} + \tfrac{1}{2}(u_0 + ju_1)e^{-jt}.
$$

(b) Laplacetransformering ger

$$
s^2U(s) - su_0 - u_1 + U(s) = 0,
$$

dvs

$$
U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2+1}.
$$

Med inverstransformering får vi

$$
U(s) = \frac{su_0+u_1}{s^2+1} = u_0\frac{s}{s^2+1} + u_1\frac{1}{s^2+1} \supset u_0\cos(t) + u_1\sin(t).
$$

(c) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$
\begin{aligned}
x_1' &= u' = x_2, \\
x_2' &= u'' = -u = -x_1,
\end{aligned}
$$

dvs, på matrisform,

$$
\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.
$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$ och egenvektorer $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$. Lösningen blir

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} g_1 + Be^{\lambda_2 t} g_2 = Ae^{jt} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} + Be^{-jt} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = x(0) = A \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix},$$

dvs $A = \frac{1}{2}(u_0 - ju_1)$, $B = \frac{1}{2}(u_0 + ju_1)$. Alltså:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2}(u_0 - ju_1)e^{jt} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}(u_0 + ju_1)e^{-jt} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_0 \cos(t) + u_1 \sin(t) \\ -u_0 \sin(t) + u_1 \cos(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; -1 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har egenvärdena $\pm j$, dvs båda har realdelen $= 0$. Det betyder att systemet är stabilt men inte asymptotiskt stabilt.

**3.** (a) Energibalansekvationerna är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho c_p V T) &= \rho c_p q (T_f - T) - \kappa A (T - T_K), \\ \frac{d}{dt}(\rho c_p V_K T_K) &= \rho c_p q_K (T_{Kf} - T_K) + \kappa A (T - T_K). \end{aligned}$$

(b) Båda ekvationerna divideras med $\rho c_p q T_f$. Med $\tau = V/q$ får vi

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) &= \frac{T_f - T}{T_f} - \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V} \frac{T - T_K}{T_f}, \\ \tau \frac{V_K}{V} \frac{d}{dt}\Big(\frac{T_K}{T_f}\Big) &= \frac{q_K}{q} \frac{T_{Kf} - T_K}{T_f} + \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V} \frac{T - T_K}{T_f}. \end{aligned}$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau, \quad X_1(s) = \frac{T(s\tau)}{T_f}, \quad X_2(s) = \frac{T_K(s\tau)}{T_f}, \quad U(s) = \frac{q_K(s\tau)}{q}$$

och dimensionslösa konstanterna

$$Z = \frac{T_{Kf}}{T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \epsilon = \frac{V}{V_K}, \quad \tau = \frac{V}{q},$$

får vi det ickelinjära differentialekvationssystemet (kedjeregeln: $\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{dt}\frac{dt}{ds} = \tau \frac{dX}{dt}$)

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= 1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2) && (\, = F_1(X, U)\ ), \\ \frac{dX_2}{ds} &= \epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2) && (\, = F_2(X, U)\ ). \end{aligned}$$

(c) Jämviktsekvationerna är

$$\begin{aligned} 1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2) &= 0,\\ \epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2) &= 0. \end{aligned}$$

Vi antar att $\bar{X}_1$ är given. Den första ekvationen ger då

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 - (1 - \bar{X}_1)/\beta.$$

Den andra ekvationen ger sedan

$$\bar{U} = \beta\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\bar{X}_2 - Z} = \frac{1 - \bar{X}_1}{\bar{X}_1 - Z - (1 - \bar{X}_1)/\beta}.$$

Obs att $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0$, så att för $\bar{U} > 0$ krävs att $\bar{X}_2 - Z > 0$, dvs $\beta > (1 - \bar{X}_1)/(\bar{X}_1 - Z)$. Alltså: $\beta$ måste vara större än detta kritiska värde för att denna jämvikt ska vara möjlig.

(d) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatriserna

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\beta & \beta \\ \epsilon\beta & -\epsilon(\bar{U}+\beta) \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial U}(\bar{X},\bar{U}) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial U}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon(Z - \bar{X}_2) \end{bmatrix}.$$

Lösningen $x(t)$ till det linjäriserade ekvationssystemet är approximation till störningen $\Delta X(t)$ av jämviktsläget, orsakad av en störning av begynnelsetillståndet $\Delta X_0 = x_0$ och en störning av styrvariabeln $\Delta U(t) = u(t)$. Vi har alltså sambanden $X(t) = \bar{X} + \Delta X(t) \approx \bar{X} + x(t)$, $X_0 = \bar{X} + \Delta X_0 = \bar{X} + x_0$, $U(t) = \bar{U} + \Delta U(t) = \bar{U} + u(t)$.

(e) Med (för enkelhets skull) $\bar{U} = 1$, $\epsilon = 1$ får vi

$$A = \begin{bmatrix} -1-\beta & \beta \\ \beta & -1-\beta \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - 2\beta$. Eftersom båda är negativa drar vi slutsatsen att det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt.

**4.** (a) I sfäriska koordinater $(R, \theta, \varphi)$ blir ekvationerna

$$\begin{aligned} &-D\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\Big(R^2\frac{dc}{dR}\Big) = -kc, \quad 0 < R < L,\\ &c'(0) = 0, \; c(L) = c_f. \end{aligned}$$

Multiplicera ekvationen med $L^2/(Dc_f)$ så fås

$$-L^2\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\Big(R^2\frac{d}{dR}\Big(\frac{c}{c_f}\Big)\Big) = -\frac{L^2k}{D}\frac{c}{c_f}.$$

Sätt $r = R/L$, $R = Lr$ och $u(r) = c(Lr)/c_f$, så fås

$$\frac{d}{dr}u(r) = \frac{d}{dR}\Big(\frac{c(R)}{c_f}\Big)\frac{dR}{dr} = L\frac{d}{dR}\Big(\frac{c(R)}{c_f}\Big),$$

och $\phi = L\sqrt{k/D}$ och

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{du}{dr}\Big) = -\phi^2 u, \quad 0 < r < 1,\\ &u'(0) = 0, \; u(1) = 1. \end{aligned}$$

(b) Med $v(r) = ru(r)$ övergår differentialekvationen i

$$v''(r) = \phi^2 v(r),$$

med allmänna lösningen

$$v(r) = A\cosh(\phi r) + B\sinh(\phi r),$$

så att

$$\begin{aligned}
u(r) &= \frac{1}{r}(A\cosh(\phi r) + B\sinh(\phi r)),\\
\frac{du(r)}{dr} &= -\frac{1}{r^2}(A\cosh(\phi r) + B\sinh(\phi r)) + \frac{\phi}{r}(A\sinh(\phi r) + B\cosh(\phi r))\\
&= A\phi^2\frac{\phi r\sinh(\phi r) - \cosh(\phi r)}{(\phi r)^2} + B\phi^2\frac{\phi r\cosh(\phi r) - \sinh(\phi r)}{(\phi r)^2}.
\end{aligned}$$

Taylorutvecklingarna $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$, $\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ visar att uttrycket efter $A$ (i derivatan) går mot $\infty$, och uttrycket efter $B$ går mot 0, då $r$ går mot 0. Därför måste $A = 0$. (Man kan också resonera så här: Eftersom $u$ är jämn måste $v$ vara udda. Funktionen cosh är jämn och sinh är udda. Därför måste $A = 0$.) Randvillkoret $u(1) = 1$ ger sedan $B = 1/\sinh(\phi)$. Lösningen blir

$$u(r) = \frac{\sinh(\phi r)}{r\sinh(\phi)}.$$

I de ursprungliga variablerna:

$$c(R) = c_f\,\frac{\sinh(\phi R/L)}{\frac{R}{L}\sinh(\phi)}.$$

(c) Effektivitetsfaktorn är kvoten mellan den faktiska reaktionshastigheten och den ideala reaktionshastigheten som skulle fås med mycket snabb diffusion dvs om $c = c_f$. I formler:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\int_V kc\,dV}{Vkc_f} = \frac{\int_0^L kc(R)4\pi R^2\,dR}{\frac{4\pi L^3}{3}kc_f} = \frac{3}{L^3}\int_0^L \frac{c(R)}{c_f}R^2\,dR\\
&= \Big\{r = R/L,\ u = c/c_f\Big\} = 3\int_0^1 u(r)r^2\,dr\\
&= \frac{3}{\sinh(\phi)}\int_0^1 r\sinh(\phi r)\,dr = \frac{3}{\phi^2\sinh(\phi)}\int_0^\phi s\sinh(s)\,ds\\
&= \{\text{ partiell integration }\} = \frac{3}{\phi^2}\Big(\frac{\phi}{\tanh(\phi)} - 1\Big).
\end{aligned}$$

(d) Massflödet ut genom ytan $S$ är proportionellt mot koncentrationsskillnaden:

$$j\cdot n = d(c - c_f), \qquad \text{på } S,$$

där $n$ är den utåtriktade enhetsnormalen. Ficks lag säger att flödet är proportionellt mot koncentrationsgradienten: $j = -D\nabla c$. Alltså:

$$-D\nabla c\cdot n = d(c - c_f), \qquad \text{på } S,$$

dvs, med riktningsderivatan $\partial c/\partial n = \nabla c\cdot n$,

$$D\frac{\partial c}{\partial n} + d(c - c_f) = 0, \qquad \text{på } S.$$

/stig