Matematik Chalmers

Tentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, 2000–08–23

Telefon: Henrik Olsson, 0740–459022
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.
Rättningsprotokoll anslås i matematikcentrum och på kursens web-sida senast 1 september.

Obs att många av delfrågorna är konstruerade så att man kan lösa (b) även om man misslyckats med (a) osv. Välformulerade (och lagom kortfattade) lösningar ger mer poäng. Några frågor är beskrivande och har kanske inget entydigt svar. Visa vad du kan!

1. (6 poäng) Funktionen f är jämn och periodisk med period 4 och $f(t) = 1$ för $0 < t < 1$, $f(t) = 0$ för $1 < t < 2$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Rita dess amplitudspektrum (de fyra första termerna räcker).

2. (14 poäng) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u''(t) + u(t) = 0 \\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

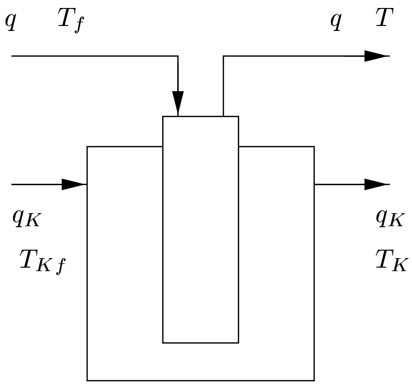
(a) Lös (1) med hjälp av metoden med karakteristisk ekvation.

(b) Lös (1) med hjälp av metoden med Laplacetransform.

(c) Skriv (1) som ett system av ODE av första ordningen. Lös detta med hjälp av egenvektormetoden.

(d) Beskriv hur man löser detta system med hjälp av Matlab.

(e) Diskutera systemets stabilitet. Rita fasporträtt.



3. (16 poäng) Tankreaktorn. Betrakta en (blandad) tankreaktor nedsänkt i en (blandad) kylvattentank med temperaturer och flödeshastigheter enligt figuren. Vi antar att båda vätskeflödena består av rent vatten, dvs vi har **ingen kemisk reaktion**. Temperaturerna T_f (hög) och T_{Kf} (låg) och flödeshastigheten q antas givna. Vi vill styra temperaturen T genom att reglera flödeshastigheten q_K i kylaren.

(a) Ställ upp balansekvationerna för värmeenergi för båda tankarna. Inför och förklara de fysikaliska storheter som du behöver.

(b) Visa hur ekvationerna kan skrivas på dimensionslös form

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= 1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2), \\ \frac{dX_2}{ds} &= \epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2), \end{aligned}$$

där $X_1 = T/T_f$, $X_2 = T_K/T_f$ är tillståndsvariabler, $U = q_K/q$ är styrvariabel och $s = t/\tau$, medan $Z = T_{Kf}/T_f$, ϵ, β, τ är konstanter. (Ange dessa konstanter.)

(c) Jämvikt. Vi vill att temperaturen X_1 ska ha ett visst värde $\bar{X}_1$. Bestäm värdet $\bar{U}$ på styrvariabeln så att detta uppnås.

(d) Linjärisering. Linjärisera kring ett jämviktsläge $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{U}$. Bestäm det linjäriserade systemet

$$x' = Ax + Bu.$$

Vad är sambandet mellan X, U och x, u? (Illustrera med figur.)

(e) Sätt för enkelhets skull $\bar{U} = 1$, $\epsilon = 1$ i Jacobimatriserna. Undersök sedan det linjäriserade systemets stabilitet.

Vänd!

4. (14 poäng) Katalysatorn. Ekvationerna

$$
\begin{aligned}
-D\Big(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\Big) &= -kc \quad \text{i sfären } \sqrt{x^2+y^2+z^2}<L,\\
c(x,y,z) &= c_f \qquad \text{på ytan } \sqrt{x^2+y^2+z^2}=L,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

beskriver reaktion och diffusion i en porös katalysator med "sfärisk" geometri under isoterma och stationära förhållanden.

(a) Skriv om ekvationerna i sfäriska koordinater (R,θ,φ); obs att c beror endast av den radiella koordinaten $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Visa sedan hur man kan skriva ekvationerna på dimensionslös form

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{du}{dr}\Big)=-\phi^2 u, \quad 0<r<1,\\
&u'(0)=0,\ u(1)=1.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Tips: inför den dimensionslösa koordinaten $r=R/L$.

(b) Lös (3). Tips: inför en ny variabel $v(r)=ru(r)$.

(c) Definiera effektivitetsfaktorn η dels i ord, dels med en matematisk formel. Beräkna η som funktion av ϕ.

(d) Härled Robins randvillkor (för katalysatorn i generell geometri) som uttrycker att massflödet genom ytan är proportionellt mot differensen av koncentrationerna innanför och utanför ytan.

/stig