TMA681 Tillämpad matematik K, 2000–05–20. Lösningar.

---

1. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y,z) = (x^2+y+z^2)e^{-x-y}$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= (2x-(x^2+y+z^2))e^{-x-y} = 0,\\ f'_y(x,y,z) &= (1-(x^2+y+z^2))e^{-x-y} = 0,\\ f'_z(x,y,z) &= 2ze^{-x-y} = 0. \end{aligned}$$

Den tredje ekvationen ger $z=0$. Den andra ekvationen ger $x^2+y+z^2=1$. Den första ekvationen ger sedan $2x-1=0$, dvs $x=\frac{1}{2}$ och $y=1-x^2-z^2=\frac{3}{4}$. Vi har alltså en extrempunkt nämligen $(\frac{1}{2},\frac{3}{4},0)$. Hessematrisen är

$$\begin{aligned} f''(x,y,z) &= \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz}\\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz}\\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz}\end{bmatrix}\\ &= e^{-x-y}\begin{bmatrix} 2-4x+(x^2+y+z^2) & -1-2x+(x^2+y+z^2) & -2z\\ -1-2x+(x^2+y+z^2) & -2+(x^2+y+z^2) & -2z\\ -2z & -2z & 2\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

I punkten $(\frac{1}{2},\frac{3}{4},0)$ får vi

$$f''(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},0) = e^{-5/4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = e^{-5/4}A.$$

Matrisen A har egenvärdena $\pm\sqrt{2}$ och 2. Det betyder att hessematrisen $f''(\frac{1}{2},\frac{3}{4},0)$ har egenvärdena $\lambda_1 = -e^{-5/4}\sqrt{2} < 0$, $\lambda_2 = e^{-5/4}\sqrt{2} > 0$, $\lambda_3 = e^{-5/4}2 > 0$, dvs matrisen är indefinit. Vi drar slutsatsen att $(\frac{1}{2},\frac{3}{4},0)$ är en sadelpunkt.

2. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2-1=0$ med rötterna $r=\pm1$. Den allmänna lösningen blir

$$u(t) = Ae^t + Be^{-t} \quad \text{med } u'(t) = Ae^t - Be^{-t}.$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0) = A+B,\\ u_1 &= u'(0) = A-B, \end{aligned}$$

dvs $A=(u_0+u_1)/2$, $B=(u_0-u_1)/2$. Alltså:

$$u(t) = \tfrac{1}{2}(u_0+u_1)e^t + \tfrac{1}{2}(u_0-u_1)e^{-t} = u_0\cosh(t) + u_1\sinh(t).$$

(b) Laplacetransformering ger

$$s^2U(s) - su_0 - u_1 - U(s) = 0,$$

dvs

$$U(s) = \frac{su_0+u_1}{s^2-1}.$$

Med partialbråksuppdelning och inverstransformering får vi

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{su_0+u_1}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+1)}\\ &= \tfrac{1}{2}\frac{u_0+u_1}{(s-1)} + \tfrac{1}{2}\frac{u_0-u_1}{(s+1)}\\ &\supset \tfrac{1}{2}(u_0+u_1)e^t + \tfrac{1}{2}(u_0-u_1)e^{-t} = u(t). \end{aligned}$$

(c) Med $x_1 = u$, $x_2 = u'$ får vi

$$\begin{aligned} x_1' &= u' = x_2, \\ x_2' &= u'' = u = x_1, \end{aligned}$$

dvs, på matrisform,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ och egenvektorer $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Lösningen blir

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} g_1 + Be^{\lambda_2 t} g_2 = Ae^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + Be^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = x(0) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

dvs $A = (u_0 + u_1)/2$, $B = (u_0 - u_1)/2$. Alltså:

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(u_0 + u_1)e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1)e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function xprime=funk(t,x)
xprime=[0 1; 1 0]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandona

```
>> u0=1; u1=2; x0=[u0; u1]; T=5;
>> [t,x]=ode45('funk',[0;T],x0);
```

(e) Det linjära systemet har ett positivt och ett negativt egenvärde. Det betyder att systemet är instabilt.

3. (a) Energibalansekvationerna är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho c_p V T) &= \rho c_p q (T_f - T) - \kappa A (T - T_K), \\ \frac{d}{dt}(\rho c_p V_K T_K) &= \rho c_p q_K (T_{Kf} - T_K) + \kappa A (T - T_K). \end{aligned}$$

(b) Båda ekvationerna divideras med $\rho c_p q T_f$. Med $\tau = V/q$ får vi

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) &= \frac{T_f - T}{T_f} - \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V} \frac{T - T_K}{T_f}, \\ \tau \frac{V_K}{V} \frac{d}{dt}\Big(\frac{T_K}{T_f}\Big) &= \frac{q_K}{q} \frac{T_{Kf} - T_K}{T_f} + \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V} \frac{T - T_K}{T_f}. \end{aligned}$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$s = t/\tau, \quad X_1(s) = \frac{T(s\tau)}{T_f}, \quad X_2(s) = \frac{T_K(s\tau)}{T_f}, \quad U(s) = \frac{q_K(s\tau)}{q}$$

och dimensionslösa konstanterna

$$Z = \frac{T_{Kf}}{T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \epsilon = \frac{V}{V_K}, \quad \tau = \frac{V}{q},$$

får vi det ickelinjära differentialekvationssystemet (kedjeregeln: $\frac{dX}{ds} = \frac{dX}{dt}\frac{dt}{ds} = \tau\frac{dX}{dt}$)

$$\frac{dX_1}{ds} = 1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2) \qquad (= F_1(X,U) \ ),$$
$$\frac{dX_2}{ds} = \epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2) \qquad (= F_2(X,U) \ ).$$

(c) Jämviktsekvationerna är

$$1 - X_1 - \beta(X_1 - X_2) = 0,$$
$$\epsilon U(Z - X_2) + \epsilon\beta(X_1 - X_2) = 0.$$

Vi antar att $\bar{X}_1$ är given. Den första ekvationen ger då

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 - (1 - \bar{X}_1)/\beta.$$

Den andra ekvationen ger sedan

$$\bar{U} = \beta\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\bar{X}_2 - Z} = \frac{1 - \bar{X}_1}{\bar{X}_1 - Z - (1 - \bar{X}_1)/\beta}.$$

Obs att $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0$, så att för $\bar{U} > 0$ krävs att $\bar{X}_2 - Z > 0$, dvs $\beta > (1 - \bar{X}_1)/(\bar{X}_1 - Z)$. Alltså: β måste vara större än detta kritiska värde för att denna jämvikt ska vara möjlig.

(d) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatriserna

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\beta & \beta \\ \epsilon\beta & -\epsilon(\bar{U}+\beta) \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U}(\bar{X},\bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon(Z - \bar{X}_2) \end{bmatrix}.$$

Lösningen $x(t)$ till det linjäriserade ekvationssystemet är approximation till störningen $\Delta X(t)$ av jämviktsläget, orsakad av en störning av begynnelsetillståndet $\Delta X_0 = x_0$ och en störning av styrvariabeln $\Delta U(t) = u(t)$. Vi har alltså sambanden $X(t) = \bar{X} + \Delta X(t) \approx \bar{X} + x(t)$, $X_0 = \bar{X} + \Delta X_0 = \bar{X} + x_0$, $U(t) = \bar{U} + \Delta U(t) = \bar{U} + u(t)$.

(e) Med (för enkelhets skull) $\bar{U} = 1$, $\epsilon = 1$ får vi

$$A = \begin{bmatrix} -1-\beta & \beta \\ \beta & -1-\beta \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - 2\beta$. Eftersom båda är negativa drar vi slutsatsen att det linjäriserade systemet är asymptotiskt stabilt.

4. (a) Multiplicera ekvationen med $L^2/(Dc_f)$ så fås

$$-L^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{c(x)}{c_f} = -\frac{L^2k}{D}\frac{c(x)}{c_f}.$$

Sätt $r = x/L$, $x = Lr$ och $u(r) = c(Lr)/c_f$, så fås

$$\frac{d}{dr}u(r) = \frac{d}{dx}\frac{c(x)}{c_f}\frac{dx}{dr} = L\frac{d}{dx}\frac{c(x)}{c_f}, \qquad \frac{d^2}{dr^2}u(r) = L^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{c(x)}{c_f}$$

och

$$-\frac{d^2u}{dr^2}(r) = -\phi^2 u(r), \quad \phi = L\sqrt{k/D},$$
$$u(\pm 1) = 1.$$

Eftersom u är en jämn funktion får vi $u'(0) = 0$ och löser istället

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dr^2} &= -\phi^2 u, \quad 0 < r < 1, \\ u'(0) &= 0, \ u(1) = 1. \end{aligned}$$

(b) Differentialekvationen är $u'' - \phi^2 u = 0$, karakteristiska ekvationen är $s^2 - \phi^2 = 0$ med rötterna $s = \pm\phi$. Allmänna lösningen blir

$$u(r) = A\cosh(\phi r) + B\sinh(\phi r).$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned} 0 &= u'(0) = A\phi\sinh(0) + B\phi\cosh(0) = B, \\ 1 &= u(1) = A\cosh(\phi) + B\sinh(\phi), \end{aligned}$$

så att

$$B = 0, \quad A = \frac{1}{\cosh(\phi)},$$

och lösningen blir

$$u(r) = \frac{\cosh(\phi r)}{\cosh(\phi)}.$$

I de ursprungliga variablerna:

$$c(x) = c_f\,\frac{\cosh(\phi x/L)}{\cosh(\phi)}.$$

(c) Effektivitetsfaktorn är kvoten mellan den faktiska reaktionshastigheten och den ideala reaktionshastigheten som skulle fås med mycket snabb diffusion dvs om $c = c_f$. I formler: (med tvärsnittsarean A)

$$\eta = \frac{\int_V kc\,dV}{Vkc_f} = \frac{\int_{-L}^{L} kc(x)A\,dx}{2LAkc_f} = \frac{1}{Lc_f}\int_0^L c(x)\,dx = \int_0^1 u(r)\,dr = \int_0^1 \frac{\cosh(\phi r)}{\cosh(\phi)}\,dr = \frac{\tanh(\phi)}{\phi}.$$

(d) Massflödet ut genom ytan S är proportionellt mot koncentrationsskillnaden:

$$j \cdot n = d(c - c_f), \qquad \text{på } S,$$

där n är den utåtriktade enhetsnormalen. Ficks lag säger att flödet är proportionellt mot koncentrationsgradienten: $j = -D\nabla c$. Alltså:

$$-D\nabla c \cdot n = d(c - c_f), \qquad \text{på } S,$$

dvs, med riktningsderivatan $\partial c/\partial n = \nabla c \cdot n$,

$$D\frac{\partial c}{\partial n} + d(c - c_f) = 0, \qquad \text{på } S.$$

/stig