TMA681 Tillämpad matematik K, 2000–01–14. Lösningar.

1. (a) Ekvationen skrivs på matrisform:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 20$ och egenvektorer $g_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $g_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, dvs

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = PDP^t.$$

Med koordinattransformationen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ blir ekvationen

$$10\xi^2 + 20\eta^2 = 1,$$

dvs

$$\frac{\xi^2}{1/10} + \frac{\eta^2}{1/20} = 1.$$

Detta är en ellips med halvaxlarna $1/\sqrt{10}$ och $1/\sqrt{20}$. De punkter som ligger närmast origo är $\xi = 0$, $\eta = \pm 1/\sqrt{20}$, dvs $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1/\sqrt{20} \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Vi har $f(x, y) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 \geq \lambda_{\min}(\xi^2 + \eta^2) = \lambda_{\min}(x^2 + y^2)$. Minsta värdet på enhetscirkeln är $\lambda_{\min} = \lambda_1 = 10$ och inträffar i de två punkter som pekas ut av egenvektorn g_1, dvs i $\pm \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. Den första ekvationen divideras med $q_f c_f$, den andra med $\rho c_p q_f T_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = \frac{q}{q_f} \frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f} \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T}\Big),$$

$$\tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{q}{q_f} \frac{T_f - T}{T_f} + \frac{(-\Delta H) c_f}{\rho c_p T_f} \frac{c}{c_f} \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T}\Big) - \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V} \Big(\frac{T - T_f}{T_f} - \frac{T_K - T_f}{T_f}\Big).$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$\begin{aligned} s &= t/\tau, \\ X_1(s) &= \frac{c_f - c(s\tau)}{c_f}, \quad X_2(s) = \frac{T(s\tau) - T_f}{T_f}, \\ U_1(s) &= \frac{q(s\tau)}{q_f}, \quad U_2(s) = \frac{T_K(s\tau) - T_f}{T_f}, \\ \alpha &= \frac{(-\Delta H) c_f}{\rho c_p T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \gamma = \frac{E}{RT_f}, \quad \delta = \tau k_0 e^{-\gamma}, \quad f(x) = \delta e^{\gamma x/(1+x)}, \end{aligned}$$

får vi

$$\frac{c}{c_f} = 1 - X_1, \quad \frac{T}{T_f} = X_2 - 1, \quad \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = -\frac{dX_1}{ds}, \quad \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{dX_2}{ds},$$

$$\begin{aligned} \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T}\Big) &= \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\Big) \exp\Big(\frac{E}{RT_f} - \frac{E}{RT_f} \frac{T_f}{T - T_f + T_f}\Big) \\ &= \delta \exp\Big(\gamma - \frac{\gamma}{X_2 + 1}\Big) = \delta \exp\Big(\gamma \frac{X_2}{X_2 + 1}\Big) = f(X_2). \end{aligned}$$

Detta leder till det ickelinjära differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{ds} &= -U_1 X_1 + (1 - X_1) f(X_2) && (\, = F_1(X, U)\ ), \\ \frac{dX_2}{ds} &= -U_1 X_2 + \alpha(1 - X_1) f(X_2) - \beta(X_2 - U_2) && (\, = F_2(X, U)\ ). \end{aligned}$$

(b) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,$$

med Jacobimatriserna

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{U}_1 - f(\bar{X}_2) & (1-\bar{X}_1)f'(\bar{X}_2) \\ -\alpha f(\bar{X}_2) & -\bar{U}_1 + \alpha(1-\bar{X}_1)f'(\bar{X}_2) - \beta \end{bmatrix},$$

där

$$f'(x) = \frac{\gamma}{(1+x)^2} f(x),$$

och

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial U_2}(\bar{X},\bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1}(\bar{X},\bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial U_2}(\bar{X},\bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{X}_1 & 0 \\ -\bar{X}_2 & \beta \end{bmatrix}.$$

(c) Lösningar $x(t)$ till det linjäriserade ekvationssystemet är approximationer till störningar av jämviktsläget, $X(t) \approx \bar{X} + x(t)$. Genom att undersöka lösningarna till det linjäriserade systemet får man information om stabiliteten hos små störningar av jämviktsläget. Ett stabilitetsvillkor: systemet är asymptotiskt stabilt (dvs alla störningar går mot noll då $t \to \infty$) om och endast om alla egenvärden λ till Jacobimatrisen A har negativ realdel. Eftersom A är osymmetrisk kan dock $x(t)$ bli stor innan den går mot noll, dvs systemet kan vara instabilt trots att det är asymptotiskt stabilt. Detta kan man undersöka t ex genom att beräkna lösningar numeriskt till det linjäriserade och det ickelinjära systemet.

3. (a) Allmänna lösningen blir

$$c(x) = A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x)$$

med derivatan

$$c'(x) = A\phi\sinh(\phi x) + B\phi\cosh(\phi x).$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned} 0 &= c'(0) = B\phi, \quad \text{så att } B = 0, \\ 0 &= c'(1) + \nu\big(c(1) - 1\big) = A\phi\sinh(\phi) + \nu\big(A\cosh(\phi) - 1\big) \end{aligned}$$

så att

$$A = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}$$

och

$$c(x) = \frac{\nu\cosh(\phi x)}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \eta &= \int_0^1 c(x)\,dx = \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} \int_0^1 \cosh(\phi x)\,dx \\ &= \frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} \frac{\sinh(\phi)}{\phi} = \frac{\tanh(\phi)}{\phi} \frac{\nu}{\phi\tanh(\phi) + \nu}. \end{aligned}$$

(c) Differentialekvationen är matematisk modell för reaktion och diffusion i en porös katalysatorpellet vid isoterma och stationära förhållanden och "platt" geometri. Ekvationen är skriven på dimensionslös form. Det första randvillkoret betyder att lösningen är en jämn funktion. Det andra randvillkoret beskriver flödet genom randen. ν är en dimensionslös genomgångskoefficient. η är effektivitetsfaktorn.

4. Stationära punkter ges av ekvationssystemet

$$1 + \bar{X}_1 - \bar{X}_1\bar{X}_2 = 0,$$
$$-4 + \bar{X}_2 + \bar{X}_1\bar{X}_2 = 0.$$

Den första ekvationen ger $\bar{X}_2 = (1+\bar{X}_1)/\bar{X}_1$, vilket insatt i den andra ekvationen ger

$$-4 + \frac{1+\bar{X}_1}{\bar{X}_1} + 1 + \bar{X}_1 = 0.$$

Förlängning med $\bar{X}_1$ leder till $\bar{X}_1^2 - 2\bar{X}_1 + 1 = 0$ med den enda lösningen $\bar{X}_1 = 1$. Vi får sedan $\bar{X}_2 = 2$. Den enda stationära lösningen är alltså $\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Linjärisering kring denna punkt leder till det linjära systemet $x' = Ax$ med Jacobi-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1-\bar{X}_2 & -\bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 & 1+\bar{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Eftersom det ena är positivt är systemet instabilt.

`/stig`