MATEMATISKA INSTITUTIONEN CTH och GU

Tentamen Tillämpad Matematik TMA990 Kb2 991217 e mn

.

Varje uppgift ger maximalt 10 p. För godkänt erfordras 25p. Dina lösningar skall vara välskrivna och lätta att följa.
Hjälpmedel: Beta, räknedosa ej tillåten.
Telefonvakt: Niklas Broberg 0740-459022.

.

1. Betrakta det linjära homogena begynnelsevärdesproblemet

$$x''(t) - 2x'(t) - 8x(t) = 0, \tag{1}$$

med $x(0) = 4$ och $x'(0) = 1$.
a) Skriv (1) som ett system av första ordningens ekvationer och bestäm koefficientmatrisen A.
b) Bestäm egenvärden och egenvektorer till A.
c) Bestäm lösningen till systemet i a).
d) Skissa fasporträttet till lösningen.
e) Avgör lösningens stabilitet.

2. a) Beskriv Eulers metod för numerisk lösning av differentialekvationer.
b) Av vilken storleksordning är felet vid Eulers metod?
c) Låt $f(n) = (1 + 1/n)^n$. Visa att för $n = 1, 2, ...$ så gäller att

$$|f(n+1) - f(n)| < \frac{3}{n}.$$

Ledning: Logaritmera och utnyttja att $0 < \ln(1 + x) < x$ för $x > 0$.
d) Redogör med hjälp av t.ex Eulers metod och resultatet i c) hur man kan använda $f(n)$ som en approximation till e.
e) Beräkna ett närmevärde till e med Euler's metod med startvärde 1 och steglängd $h = 1/4$.

3. En tank innehåller 100 liter saltvattenslösning med 1 kg salt. Vid tiden t=0 hälls en saltlösning med 0.2 kg salt/liter ned i tanken med flödeshastigheten 1 liter/min. Den välblandade lösningen lämnar tanken med samma flödeshastighet.
a) Bestäm mängden salt i tanken vid tiden t.

b) Bestäm den tidpunkt vid vilken tanken innehåller 2 kg salt.
c) Skissa grafen av saltmängden som en funktion av tiden t.

4. Betrakta värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = x,\ 0 < x < L/2, \\ u(x,0) = L - x,\ L/2 < x < L. \end{cases}$$

Bestäm $u = u(x,t)$.

5. Betrakta Laplace's ekvation

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

i halvplanet $-\infty < x < \infty$, $y > 0$. Antag att $u(x,t)$ är begränsad då $y \to \infty$ och att $u(x,0) = 1$ då $|x| < 1$ och $u(x,0) = 0$ för övrigt. Bestäm $u(x,t)$.