Tentamen Tillämpad Matematik TMA990 Kb2 011221

.

Provet består av tre uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 10 p. För godkänt krävs 10p.
Betygsgränser: 3: 10-16, 4: 17-23, 5: 24-30.
Dina lösningar skall vara välskrivna och lätta att följa.
Telefonvakt: Rolf Liljendahl 0740-459022.

.

1. Responsen från en dämpad harmonisk oscillator som utsätts för en plötslig puls vid tiden $t = 0$ beskrivs av differentialekvationen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \delta'(t), \quad t > 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Bestäm responsen y(t). Detta problem kan tänkas beskriva tillståndet hos en student som omedelbart efter att ha sett tentan känner det hela som ett hammarslag i huvudet. Lyckligtvis är förloppet snabbt övergående. Julbonus utdelas till den som kompletterar lösningen med en graf för $y(t)$. (10)

2. Funktionen f_n, $n > 0$, definieras genom

$$f_n(t) = \int_0^n \frac{\sqrt{\omega} e^{i\omega t}}{(1+\omega^2)^2}\, d\omega.$$

(a) Bestäm $\hat{f}_n(\omega)$. (4)
(b) Den till f_n hörande totala energin E_n definieras som

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2\, dt.$$

Beräkna E_n och visa att $E_n < \pi/3$ samt att (6)

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \pi/3.$$

3. Lös vågekvationen

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - a u_t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \pi x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

där a är en reell-värd konstant

. vänd

(a) för fallet $a = 0$ (odämpad). (6)

(b) för fallet $a = 2$ (dämpad). (4)

Visa att i fallet (b) så gäller att

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = 0.$$

. GOD JUL och GOTT NYTT ÅR önskar Nils !!