Lösningar Tillämpad Matematik TMA990 Kb2 991217

.

1. a) Med $x_1 = x$ och $x_2 = x'$ fås systemet $X' = AX$ med koefficientmatris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

där $X = (x_1, x_2)$ med initialdata $X(0) = (4, 1)$.
b) Egenvärden $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -2$ med egenvektorer $v_1 = (1, 4)$ respektive $v_2 = (1, -2)$.
c) Allmän lösning

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Initialdata ger $c_1 = 3/2$ och $c_2 = 5/2$.
d) Skiss av fasporträtt.

e) Lösningen är ej stabil eftersom ett egenvärde är positivt.

2. a) Se t.ex. Numerical solutions of ODE's.
b) Felet är av samma storleksordning som steglängden h. Se tex Numerical solutions of ODE's II.
c)

$$|f(n+1) - f(n)| = |(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n| \leq |(1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n| = f(n)/n.$$

Ledningen ger nu att $0 < n \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 < \ln 3$, varvid resultatet följer.
d) Eulerschemat

$$y_{n+1} = y_0 (1 + \frac{1}{n})^n$$

ger bättre och bättre approximation när n väljs allt större.
e) $(1 + \frac{1}{4})^4 = \frac{625}{256}$.

3. Vi söker saltmängden $Q(t)$ (kg) vid tiden t (min) i tanken. Förändring i $Q(t)$ per tidsenhet ges av mängden inkommande salt minus mängden salt

som rinner ut vid tiden t. Med givna data ger detta ett begynnelsevärdesproblem för $Q(t)$

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + 0.01Q = 0.2, \\ Q(0) = 1. \end{cases}$$

Allmän lösning

$$Q(t) = -19e^{-0.01t} + 20.$$

Genom att lösa ekvationen

$$2 = -19e^{-0.01t} + 20$$

fås att det tar $-100 \ln 18/19$ minuter innan tanken innehåller 2 kg salt.
c)

4. Variabelseparation $u(x,t) = F(x)G(t)$. Egenvärdesproblemet för F ger egenfunktionerna

$$F_n(x) = \sin n\pi x/L, \quad n = 1,\ 2,\ ...,$$

Insättning i G's ekvation ger

$$g_n(t) = B_n e^{-(n^2\pi^2/L^2)t}$$

Superposition ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) G_n(t).$$

Initialdata bestämmer B_n enligt

$$B_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x \sin n\pi x/L dx + \int_{l/2}^{L} (L-x) \sin n\pi x/L dx\right).$$

Vi får

$$B_n = \begin{cases} 0,\ n = 2,\ 4,\ ..., \\ \frac{4L}{n^2\pi^2},\ n = 1,\ 5,\ 9,\ ..., \\ \\ -\frac{4L}{n^2\pi^2},\ n = 3,\ 7,\ 11,\ ... \end{cases}$$

5. Fouriertransformering i x-led ger en ODE i variabeln y med parameter ξ. Allmän lösning

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-xiy}.$$

Initialdata ger

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Inverstransformering ger

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{x+1}{y} - \arctan\frac{x-1}{y}\right).$$