Svar o lösningar till Blandade problem Tillämpad Matematik Kb2 ht-00

.

1. (Karolin special (R))

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\xi x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\,dx,$$

ty f är jämn.

2.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos(\xi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}.$$

För $\xi = 1$ fås

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}.$$

3. f udda gör att vi kan utveckla f i en sinusserie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Parsevals sats ger

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Detta tillsammans med förutsättningarna i uppgiften ger

$$1 = \int_{0}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

vilket ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi}.$$

Derivering ger nu

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(nx).$$

Parsevals sats igen ger

$$\int_0^\pi |f'(x)|^2\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty n^2 b_n^2 \geq \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty b_n^2 = 1,$$

Likhet inträffar endast då $b_n \equiv 0$ för $n \geq 2$. Då $b_1 = \sqrt{2/\pi}$ inträffas således likhet för valet

$$f(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(x).$$

4. b) Fourierkoefficienterna ges av

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad n > 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0, \quad n > 0;$$

Vi får

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

c) $x = \pi$ ger

$$VL = \pi^2 \text{ och } HL = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

vilket ger att

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Period $T = 4$, vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T = \pi/2$. $f(t)$ är jämn så $b_n = 0$. För $n \geq 1$ gäller

$$a_n = \int_0^1 (1-t)\cos(\frac{n\pi}{2}t)\,dt = [part.\ int.] = \frac{4}{(n\pi)^2}(1-\cos(\frac{n\pi}{2}))$$

Vidare har vi

$$a_0 = \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Detta ger

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(1-\cos(\frac{n\pi}{2}))}{n^2}\cos(\frac{n\pi}{2}t).$$

Valet $t = 0$ ger

$$1 = f(0) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))}{n^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Således fås

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Parsevals sats ger

$$\frac{1}{4} 2 \int_0^1 (1-t)^2 \, dt = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\frac{n\pi}{2}))^2}{n^4}.$$

Således fås

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

6. $(f * f')(t)$ har Fouriertransform $\hat{f}(\xi) i\xi \hat{f}(\xi)$. Plancherels formel ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(f * f')(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi) i\xi \hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^4 \, d\xi.$$

Vi får

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^4 \, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 (\xi^3 + 1)^{-4} \, d\xi = \frac{1}{9\pi}.$$

7. a) Upprepad partiell integration ger

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x) e^{-i\omega x} dx = (i\omega)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = (i\omega)^n.$$

b)

$$|\hat{f}(\omega)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||e^{-i\omega x}| dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot dx = \pi.$$

8. Variabelseparation

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X''T = kXT' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'k}{T} = konstant.$$

Standardargumentation ger nu ekvationerna

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \;\text{ och }\; T' + \frac{\lambda^2}{k} T = 0.$$

Allmän lösning till X-ekvationen:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Användning av randdata ger icke-triviala egenfunktioner

$$X_n(x) = A_n \cos n\pi x/L.$$

På samma sätt fås

$$T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t/L^2 k}.$$

Allmän lösning:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t/L^2 k} \cos n\pi x/L.$$

Initialdata ger

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi x/L, \quad 0 < x < L,$$

som är en Fourierserieutveckling av x på $0 < x < L$ med Fourierkoefficienter A_n. Dvs

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos n\pi x/L.$$

Integration ger

$$A_0 = L \;\text{ och }\; A_n = 2L[(-1)^n - 1]/n^2\pi^2, \quad n > 0.$$

Varvid

$$u(x,t) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/L^2 k} \cos{(2n-1)\pi x/L}.$$

Om vi låter $t \to \infty$ ger $e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/L^2 k}$'s snabba avtagande att

$$u(x,t) \to L/2.$$

dvs den stationära temperaturfördelningen i tråden.

9. Ansätt $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Det ger ekvationen

$$X''Y + XY'' + 20XY = 0,$$

vilket ger

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - 20 = \lambda.$$

Vi löser på standardsätt egenvärdesproblemet för X med homogena randdata. Det ger egenvärdena $\lambda_n = -(n\pi)^2$ med egenfunktioner

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n \geq 1.$$

Insättning i Y's ekvation $Y'' = -(20+\lambda)Y$ ger två fall. För $n = 1$ är $-(20+\lambda)$ negativ och vi får ekvationen

$$Y_1'' = -\beta_1^2 Y_1, \quad \beta_1 = \sqrt{20 - \pi^2}$$

med lösning

$$Y_1 = B_1 \sin(\beta_1 y)$$

För $n \geq 2$ är $-(20+\lambda)$ positiv och vi får ekvationen

$$Y_n'' = \beta_n^2 Y_n, \quad \beta_n = \sqrt{(n\pi)^2 - 20}$$

med lösning

$$Y_n = B_n \sinh(\beta_n y)$$

Vi ansätter därmed

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = B_1 \sin(\pi x)\sin(\beta_1 y) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)\sinh(\beta_n y).$$

Återstår att bestämma Fourierkoefficienterna Y_n till det fullständiga ortogonalsystemet $\{X_n(x)\}$ så att $u(x,1) = x^2 - x$. Vi bestämmer först normeringsfaktorn

$$M_n = \int_0^1 X_n^2(x)dx = \int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \frac{1}{2}.$$

Fourierkoefficienterna fås som

$$Y_n(1) = \frac{1}{M_n}\int_0^1 (x^2 - x)X_n(x)dx = 2\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x)dx = 4\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3}.$$

Således fås

$$Y_1(1) = B_1 \sin(\beta_1) = -\frac{8}{\pi^3}$$

och för $n \geq 2$

$$Y_n(1) = B_n \sinh(\beta_n) = 4\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3}.$$

10. Inhomogen ekvation så vi sätter

$$u(x,y) = v(x,y) + S(x)$$

Vi löser först

$$S''(x) = x, \quad S'(0) = 0, \quad S(1) = 0$$

och får

$$S(x) = \frac{x^3 - 1}{6}$$

Kvar att lösa har vi ekvationen

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad v_x(0,y) = 0, \quad v(1,y) = ye^{-|y|}.$$

Fouriertransformering i y-led ger

$$\hat{v}_{xx}(x,\omega) - \omega^2 \hat{v}(x,\omega) = 0, \quad \hat{v}_x(0,\omega) = 0, \quad \hat{v}(1,\omega) = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2}.$$

Alllmän lösning

$$\hat{v}(x,\omega) = A(\omega)\cosh(x\omega) + B(\omega)\sinh(x\omega).$$

Data ger

$$\hat{v}_x(0,\omega) = 0 \Longrightarrow B(\omega) = 0.$$

$$\hat{v}(1,\omega) = -\frac{4i\omega}{(1+\omega^2)^2} = A(\omega)\cosh(\omega).$$

Fouriers inversionsformel ger nu

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{4i\omega\cosh(x\omega)}{(1+\omega^2)^2\cosh(\omega)} e^{iy\omega}\, d\omega =$$

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} -\frac{\omega\cosh(x\omega)\cosh(y\omega)}{(1+\omega^2)^2\cosh(\omega)} d\omega.$$

Summering av S och v ger nu u.

11. Fouriertransformering i x-led ger ODE'n

$$\hat{u}_t(\omega,t)+\omega^2\hat{u}(\omega,t)-\hat{u}(\omega,t)=0, \quad \hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)\subset e^{x-x^2}.$$

Allmän lösning

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)e^{-(\omega^2-1)t}.$$

Vi har

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}-\frac{i\omega}{2}-\frac{\omega^2}{4}}$$

Således

$$\hat{u}(\omega,t)=\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}-\frac{i\omega}{2}-\frac{\omega^2}{4}}e^{-(\omega^2-1)t}.$$

Efter kvadratkomplettering tex kan man transformera tillbaka

$$u(x,t)=\frac{e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{4t+1}}e^{t-\frac{(4x-1)^2}{16t+4}}$$