TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2002-01-15
Telefonjour/rond: Erik Broman, tel. 0740-459022
Hjälpmedel: Beta och CTH-typgodkänd kalkylator.
==

Som vanligt betecknar $\dot{u}$ tidsderivata, u' och ∇u betecknar x-derivata resp. gradient m.a.p. $x = (x_1, .., x_d)$ av $u(x,t)$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ betecknar Laplaceoperatorn, $||u||_\omega$ betecknar L_2-norm av u över ω, och f är givna data.

1. a) Redogör för en lämplig finit element metod för problemet

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f \quad \text{för } 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u = 0 \quad \text{för } t = 0, \quad u'(0,t) = u'(1,t) = 0 \quad \text{för } t > 0. \end{cases}$$

b) Skissera det förväntade utseendet av $u(x,1)$ och $u(0,t)$ för $f(x,t) = x$. (10p)

2. Låt u vara lösningen till

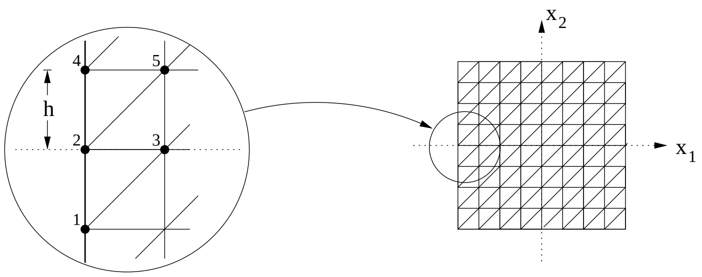
$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{i } \Omega \\ -\partial_n u = ku \quad \text{på } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

där Ω är ett område i R^d, med rand Γ, $\partial_n u = n \cdot \nabla u$ är riktningsderivatan av u i utåtriktade enhetsnormalens riktning, och $k \geq 0$ är en konstant.
a) Visa att $||u||_\Gamma \to 0$ då $k \to \infty$. Tips: multiplicera med u, integrera, och utnyttja olikheterna

$$||u||_\Omega \leq C_\Omega(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega) \tag{2}$$

och $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.
b) Härled uppskattningen (2). Tips: Tag hjälp av en (snäll) funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ och utnyttja att $||u||_\Omega^2 = \int_\Omega u^2 \Delta\phi = ...$ (10p)

3. Låt Ω vara området i figur, med given triangulering och nodnummer, och låt



U vara den styckvis linjära cG1 lösningen till problemet (1) i uppgift 2, med $f = 1$ och $k = 0$ i den aktuella (fokuserade) delen av området.
a) Vilket samband råder (givet av testfunktionen ϕ_2) mellan nodvärdena U_1, U_2, U_3, U_4 och U_5?
b) Vilket blir motsvarande samband om ekvationen ändras till $-\Delta u + (1,0) \cdot \nabla u = 1$ alternativt (välj ett av fallen!) $-\nabla \cdot a \nabla u = 1$ med $a = 1$ för $x_2 < 0$ och $a = 2$ för $x_2 > 0$? (10p)

4. Funktionerna

a) $\frac{1}{4\pi|x|}$ b) $\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ och c) $\int_{R^3} \frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}v(y)\,dy$

är lösningar till fundamentala differentialekvationsproblem. Vilka? Glöm ej att ange typ av område/rumsdimension, begynnelsevillkor och randvillkor!
d) En punktvärmekälla med intensitet 1 per volymsenhet har verkat i origo i 3D under (mycket) lång tid, utgående från 0-temperatur överallt. Ange en formel för den resulterande temperaturfördelningen i 3D-rummet.
e) Utgående från temperaturfördelningen i d) "slocknar" plötsligt värmekällan vid $t = 0$. Hur utvecklas temperaturen i origo för $t > 0$. (10p)

5. Betrakta

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds.$$

Uppenbarligen gäller $u(x,0) = 0$.
a) Visa att även $\dot{u}(x,0) = 0$. Tips: se Beta avsnitt "Differential formulas".
b) Visa att u löser vågekvationen $\ddot{u} - u'' = f$.
c) Skissera $u(x,1)$ för $-3 \leq x \leq 3$ om $f = 1$ för $-1 < x < 1$ och $f = 0$ för övrigt. (10p)

Lycka till / K.E.