Tentamen Partiella differentialekvationer, TMA690 F2 030524 V em

Provet består av fem uppgifter som kan ge max 10 poäng vardera, för godkänt krävs 25p.
Betygsgränser: **3**: 25-33, **4**: 34-42, **5**: 43-50.
Hjälpmedel: Beta.
Dina lösningar skall vara välskrivna och lätta att följa.
Telefonvakt: Johan Jansson 0740-459022.

1. Betrakta differentialekvationen:

$$\begin{cases} (a(x)u'(x))' = 0, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ a(1)u'(1) = g_1. \end{cases} \tag{1}$$

Ange ett fysikaliskt problem som (1) anses modellera samt redogör för en härledning av differentialekvationen. Ange speciellt de fysikaliska storheter som $u(x)$ och $a(x)u'(x)$ representerar samt beskriv vad de bägge randvillkoren modellerar.

2. a) Formulera en finita element-metod för (1).
b) Bevisa *a posteriori* feluppskattningen

$$||(u-U)'||_a \leq C_i ||hR(U)||_{1/a}, \tag{2}$$

där U är den styckvis linjära och kontinuerliga finita element-lösningen till (1).
c) Låt $a(x) = 1$ för $x < \frac{1}{2}$, $a(x) = 2$ för $x \geq \frac{1}{2}$ och $g_1 = -2$. Härled det matrisproblem $AU = b$ som uppstår vid diskretisering med FEM och styckvis linjära och kontinuerliga funktioner på en likformig indelning av intervallet $[0,1]$ i fyra delintervall. Beräkna explicit endast matriselementen a_{22} och a_{34} samt vektorelementet b_4.
d) Visa med hjälp av feluppskattningen (2) att finita element-lösningen som fås ur ovanstående problem faktiskt är exakt, d.v.s. att felet $u - U = 0$.

3 Betrakta det tidsberoende problemet

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + au(t) = 0, & t > 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

a) Betrakta först fallet $a = 40$. Skissera som funktioner av nk, $n = 0, 1, 2, ...$, de approximationer U_n av $u(nk)$ som erhålls då tidsstegning görs med *i*) explicit Euler, *ii*) implicit Euler samt *iii*) Crank-Nicolson med tidssteget $k = 0.1$.
b) Betrakta så fallet $a = i$, där $i^2 = -1$, med komplex lösning $u(t) = e^{-it}$ med egenskapen att $|u(t)| = 1$ för all tid. Visa att samma egenskap återfinns hos lösningar beräknade med Crank-Nicholson, d.v.s $|U_n| = 1$ för alla n, men inte för de beräknade med explicit eller implicit Euler.

Var god vänd!

4. a-c) Visa att för $u(x,t)$ som löser

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) - u''(x,t) = 0, & x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(0,t) = u'(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{4}$$

gäller att a) $||u(\cdot,t)||$ och b) $||u'(\cdot,t)||$ avtar med tiden t. Visa också att c) $||u'(\cdot,t)|| \to 0$ då $t \to \infty$.
d) Ge en fysikalisk tolkning av a)-c).

5. Bestäm lösningen till vågekvationen

$$\begin{cases} \ddot{u} - 4u'' = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x > 0, \\ \dot{u}(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Skissera också lösningen för de tre tiderna $t = 0.5, 1, 2$ då

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2,3], \\ 0, & \text{annars}. \end{cases} \tag{6}$$