Tillämpningsexempel 1

Vi betraktar först ett biologiskt system med tre arter, nämligen varg, räv och hare, där vargar och rävar är *konkurrenter* om samma byte, dvs de stackars hararna, men där vargen, vid behov, även kan tänkas slå en räv. Om vi låter u_1 beteckna vargdenisiteten, u_2 rävdenisiteten och u_3 hardensiteten så erhålls följande modell:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 - \nabla \cdot a_1 \nabla u_1 &= f_1(u) \\
\dot{u}_1 - \nabla \cdot a_1 \nabla u_1 &= f_1(u) \\
\dot{u}_1 - \nabla \cdot a_1 \nabla u_1 &= f_1(u)
\end{aligned}$$

där $u = (u_1,\, u_2,\, u_3)$, $f_1(u) = ..$, o.s.v.

Tillämpningsexempel 2

Titrering: Vi tänker oss ett cirkulärt kärl med radie 1 med ett roterande flöde med hastighetsfält b givet av en magnetomrörare. Ett möjligt sådant flöde ges av $b = (x_2,\, -x_1) = \nabla \times \frac{1}{2} r^2$, där $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Detta flöde är divergensfritt, eftersom det är av typ $\nabla \times \phi$, men roterar som en stelkropp, dvs utan hänsyn till randvillkoret $b = 0$ ("no slip") p.g.a. friktionen mot kärlets vägg vid $r = 1$. Vi betraktar därför även $b = \nabla \times 10 * (1 - r)^2 * r^3$ med en något annorlunda profil, och som bl.a. uppfyller randvillkoret $b = 0$ för $r = 1$.

Tillämpningsexempel 3

Vid tiden $t = 0$ tillför vi i punkten $(.5, 0)$ en droppe av en viss substans. Detta modelleras genom att för koncentrationen $u(x,\, t)$ av ämnet sätta begynnelsevärdet $u_0(x) = u(x,\, 0)$ lika med $1/a$ droppe per areaenhet (a.e.), där a (a.e.) är en droppes tvärsnittsarea, i ett cirkulärt område med arean a runt punkten $(.5,\, 0)$. Vi löser sedan konvektions-diffusionsproblemet

$$\dot{u} + b \cdot \nabla u - \nabla \cdot a \nabla u = 0 \quad \text{för } |x| < 0,\, t > 0,$$

med randvillkor $-a\, \nabla u = 0$ längs randen $|x| = 1$, fram till tiden $t = 1$.

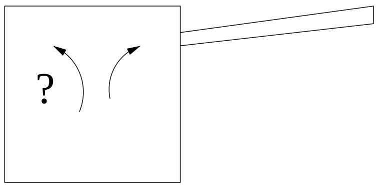
Tillämpningsexempel 4

Ett alternativ till att implementera dropptillsatsen via begynnelsevillkoret är förstås att istället använda en "källterm" $f(x, t)$ lokaliserad i tid och rum till ögonblicket efter $t = 0$ och punkten $(.5,\, 0)$, med $u_0 = 0$.

För att modellera effekten av en "striltitrering", dvs kontinuerlig punktvis tillförsel av ämnet måste man förtås använda denna metod.

Tillämpningsexempel 5

Kokning: Vi önskar modellera konvektionen i ett (kok)kärl fyllt med vätska (vatten) inducerad av uppvämning utifrån via kärlets väggar. För att studera fenomenet kvalitativt betraktar vi en 2D modell med ett kärl motsvarande enhetskvadraten $0 < x_i < 1$, $i = 1, 2$. Vi tillför sedan värme till kärlet via kärlets botten alternativt en av "väggarna" och betecknar den resulterande temperaturen i vätskan med T.



värmetillförsel

Tillämpningsexempel 6

Temperaturen T bestäms som vanligt av randvillkoret $-a\,\nabla T = \gamma\,(T - g_D) + g_N$ samt värmeledningsekvationen

$$c\dot{T} + u \cdot \nabla T - \nabla \cdot a\nabla T = 0,$$

där c är kapaciteten, a konduktiviteten, och u konvektionen, dvs den temperaturbärande vätskans hastighet.

Tillämpningsexempel 7

Hastigheten u bestäms i sin tur av Navier-Stokes ekvationer, dvs

$$\dot{u} + (u \cdot \nabla)\,u - \mu\,\Delta u = f - \nabla p$$

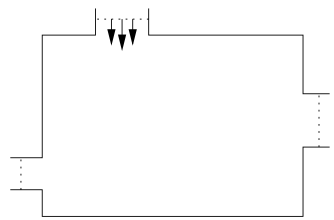
och $\nabla \cdot u = 0$, samt randvillkoret $u = 0$, där p är trycket och f den kraft som driver fram konvektionen i vätskan. Denna kraft orsakas i detta fall av densitetsvariationer i vätskan till följd av den expansion/volymsökning som uppvärmningen ger. Denna kraft bör först ge sig till känna som en uppåtriktad kraft som växer med stigande lokal uppvärmning och därför skulle kunna modelleras med $f = (0, T)$.

Tillämpningsexempel 8

Till detta kommer naturligtvis begynnelsevillkor, t.ex. $u(x, 0) = 0$ och $T(x, 0) = 0$. Den tänkta värmetillförseln kan sedan modelleras genom att sätta $\gamma >> 1$ och $g_D > 0$, eller med $\gamma = 0$ och $g_N < 0$, dvs givet (negativt) värmeutflöde. Som en variant skulle man kunna tänka sig ett öppet (kok)kärl, dvs utan "lock". Randvillkoret för hastighetsfältet u ändras då rimligen till $u_2 = 0$ och $\partial_n u_1 = 0$.

Tillämpningsexempel 9

Givet inflöde: Vi betraktar ett kärl med givet inflöde och flera möjliga utflöden, och ställer helt enkelt frågan vilken väg flödet väljer att ta.



Tillämpningsexempel 10

Vi erinrar oss att flödet bestäms av Navier-Stokes ekvationer

$$\dot{u} + (u \cdot \nabla)\, u - \mu\, \Delta u = -\nabla p, \ \ \nabla \cdot u = 0,$$

och randvillkoren $u = 0$ längs de fasta ränderna, $u = g$ längs inflödesranden, och $n \cdot \sigma$ eller $n \cdot \nabla u$ längs utflödesränderna. Vi bör rimligen kunna räkna med ett visst utflöde genom båda de potentiella utflödesränderna. Frågan är hur stort flödet blir genom respektive utlopp.