Tentamen i Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar del A, för Kb. 22 oktober 2001, 08.45–12.45. Inga hjälpmedel. Totalt 50p.

Problem 1. (a) Beskriv vad en triangulering av ett område Ω med polygonrand i $\mathbf{R}^2$ är, samt ange hur storleken på trianglarna mäts. (2p)
(b) Beskriv en metod för lokal förfining av en del av trianglarna. (2p)
(c) Definiera rummet V_h av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner definierade på en triangulering av Ω. Definiera tältfunktionerna i V_h och visa att dessa utgör en bas för V_h. (3p)
(d) Beskriv hur basen modifieras om man kräver att funktionerna i V_h skall vara noll på randen $\partial\Omega$ av Ω. (1p)

Problem 2. (a) En kontinuerlig funktion v är definierad på Ω. Definiera interpolanten $\pi_h v$ av v. (1p)
(b) Formulera uppskattningar för interpolationsfelet $v - \pi_h v$ och dess gradient $\nabla(v - \pi_h v)$ i max-norm. Formulera och bevisa motsvarigheten till en av dessa uppskattningar i en rumsdimension. (5p)
(c) Låt $f = x^2$ vara definierad på $I = (0, 1)$. Beräkna L^2-projektionen Pf på rummet av linjära funktioner på I. Rita en figur som visar f och Pf. (3p)

Problem 3. Betrakta problemet

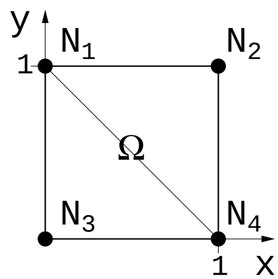
$$-\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f, \quad \text{i } \Omega, \tag{1}$$

$$-n \cdot (a\nabla u) = \gamma(u - g_D) + g_N, \quad \text{på } \partial\Omega. \tag{2}$$

(a) Förklara all ingående notation samt ange vad som är givna data och vad som söks. (2p)
(b) Ange en fysikalisk tolkning till problem (1)-(2). Diskutera speciellt en fysikalisk tolkning av Robinrandvillkoret (2). (2p)
(c) Låt $w(x, y) = x \sin y$ och beräkna ∇w, $b \cdot \nabla w$ där $b = (1, 0)$ och Δw. (2p)
(d) Antag att $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $a = 1$, $c = 0$, $f = 1$, $\gamma = 0$, $g_D = 0$, och $g_N = 1/2$. Visa att $u = (1 - x^2 - y^2)/4$ är en lösning till problem (1)–(2). (2p)
(e) Härled en variationsformulering av (1)–(2). (2p)

Problem 4. (a) Formulera finita element-metoden för (1)–(2). (2p)
(b) Härled ett linjärt ekvationssystem som bestämmer finita element-

lösningen U. (4p)
(c) Härled Galerkin-ortogonalitetsekvationen som felet $u - U$ uppfyller. (2p)
(d) Visa att det existerar en lösning till din finita element-metod i fallet då $a > 0$, $c = 0$ och $\gamma > 0$ på en del av randen. (2p)



Figur 1: Problem 5. Indelning av Ω i två trianglar.

Problem 5. Låt $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ vara indelat i två trianglar. Se Figur 1.
(a) Beräkna hela massmatrisen. (2p)
(b) Beräkna element a_{11} i styvhetsmatrisen (inklusive randbidrag) A samt lastvektorn (inklusive randbidrag) för finita element-metoden i 4(a) då $a = 1$, $c = 0$, $f = 1$, $g_D = 1$, $g_N = 1$ och $\gamma = 1$. (2p)
Ledning: Använd lämpliga kvadraturformler.

Problem 6. (a) Formulera en a posteriori-feluppskattning i fallet då $a = 1$, $c = 0$, och Robinrandvillkoret (2) byts mot ett homogent Dirichletrandvillkor. (1p)
(b) Bevisa motsvarigheten i en rumsdimension. (2p)
(c) Ange de fyra huvudkomponenterna i en adaptiv algoritm baserad på a posteriori-uppskattningen och förklara kortfattat deras roll. Formulera en adaptiv algoritm. (2p)

Problem 7. Betrakta systemet av ordinära differentialekvationer

$$M\dot{\xi} + A\xi = b, \quad \text{i } (0,T), \tag{3}$$
$$\xi(0) = \xi^0. \tag{4}$$

(a) Antag att

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dela in tidsintervallet $(0, 1)$ i två lika långa tidssteg och beräkna en approximation av $\xi(1)$ med bakåt Euler. (2p)
(b) Betrakta

$$\dot{u} - \nabla \cdot (a \nabla u) = f, \quad \text{i } \Omega \times (0, T), \tag{6}$$
$$u(x, 0) = u_0, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$
$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \, t \in (0, T). \tag{8}$$

Härled systemet av ordinära differentialekvationer (3)–(4) genom att diskretisera (6)–(8) i rummet. (2p)