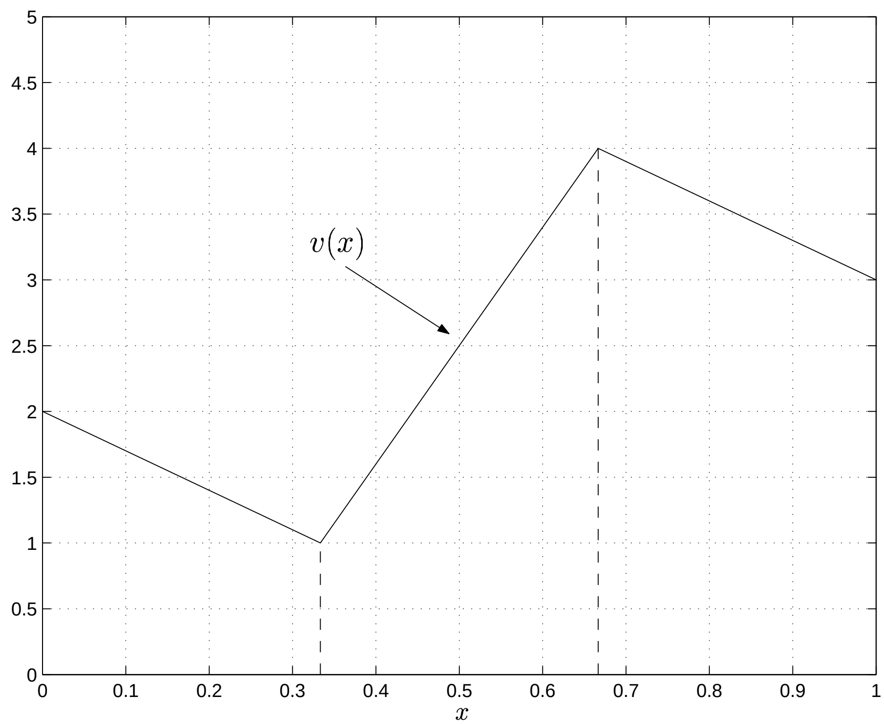
Deltentamen 2002-04-25

TMA225: Differentialekvationer och tekniska beräkningar, del A, för K1/Kf1.

08.00 – 09.45. Inga hjälpmedel. Totalt 30p.

V_h betecknar vektorrummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ av intervallet $I = [0,\, 1]$ i N stycken delintervall.

Problem 1.
(a) Definiera de s.k. hatt-funktionerna $\varphi_i \in V_h$. Hur många är de? Vilken är *dimensionen* av V_h? (2p)
(b) Betrakta fallet $N = 3$ med $x_1 = 1/3$ och $x_2 = 2/3$, d.v.s., en *likformig* indelning av I i tre delintervall. Skriv upp det analytiska uttrycket för φ_1. Rita φ_1 i en figur. (2p)
(c) I Figur 1 är en funktion $v \in V_h$ ritad. (Med samma indelning av I som i (b).) Skriv v som en linjärkombination av hatt-funktioner. (2p)



Figur 1: Problem 1(c).

Problem 2. Låt $g : I \to \boldsymbol{R}$ vara en given funktion.
(a) Definiera interpolanten $\pi_h g \in V_h$ av g, och skriv $\pi_h g$ som en linjärkombination av hatt-funktioner. (2p)

(b) Betrakta ånyo fallet $N = 3$ med indelning av I som i Problem 1(b). Låt $g(x) = x^2$. Beräkna $\pi_h g$. Rita g och $\pi_h g$ i samma figur. (1p)
(c) Definiera $L_\infty(I)$-normen $\|v\|_{L_\infty(I)}$ av en funktion v definierad på intervallet I. (1p)
(d) *Formulera* en uppskattning av interpolationsfelet $\|g - \pi_h g\|_{L_\infty(I)}$. (2p)

Problem 3. Låt $g : I \to \boldsymbol{R}$ vara en given funktion.
(a) Definiera L^2-projektionen $P_h g \in V_h$ av g. (2p)
(b) Antag att I delas in på samma sätt som i Problem 1(b). Vi har då att

$$P_h g(x) = \sum_{j=0}^{3} \xi_j \, \varphi_j(x).$$

Koefficienterna ξ_j, $j = 0, 1, 2, 3$, bestäms av det linjära ekvationssystemet

$$\frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

där $h = 1/3$ och $b_i = \int_0^1 g(x)\, \varphi_i(x)\, dx$, $i = 0, 1, 2, 3$. Härled detta ekvationssystem från definitionen av L^2-projektion. (4p)
(c) Låt $g(x) = x + 1$. Beräkna b_0 och b_1 med hjälp av Simpsons formel. (3p)

Problem 4.
(a) Lös (analytiskt) differentialekvationen

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{i } (0,\, 1), \tag{2}$$

med randvillkoren

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{3}$$

och $f(x) = x^3 + 1$. (3p)
(b) Formulera finita element-metoden för problem (2) med randvillkoren (3). (2p)
(c) Definiera $L^2(I)$-normen $\|v\|_{L^2(I)}$ av en funktion v definierad på intervallet I. (2p)
(d) Formulera en uppskattning av $\|u' - U'\|_{L^2(0,\,1)}$, där U är finita element-approximationen av u. (2p)