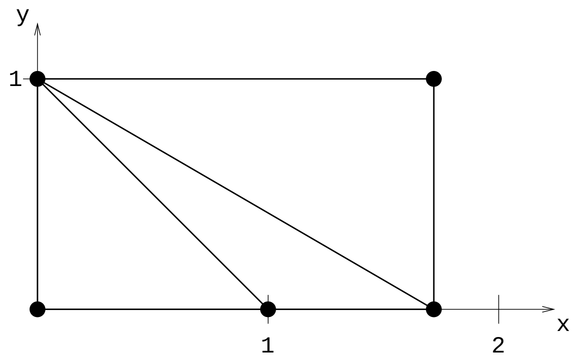
Tentamen i Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar för Kb del A, TMA205, 14 januari 2002, fm, inga hjälpmedel. Totalt 50p.
Tentamensvakt: Mats Kjaer, anknytning 5321.



Figur 1: Problem 1. Ursprunglig triangulering.

Problem 1. Betrakta en triangulering med noder $(0,0), (1,0), (\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},1)$, samt $(0,1)$. Se Figur 1.
(a) Beräkna storleken av trianglarna (ekvivalent: beräkna mesh-funktionen) och minsta vinkeln i trianglarna. (2p)
(b) Inför en numrering av noderna och trianglarna. Ange matriserna p och t som beskriver denna triangulering i Matlab. (2p)
(c) Antag att triangeln med hörn i $(0,0), (1,0)$ och $(0,1)$ skall förfinas. Rita den triangulering du får med hjälp av Rivara-förfining. (1p)
(d) Vilken dimension har rummet V_h av styckvis linjära, kontinuerliga funktioner på den ursprungliga respektive den förfinade trianguleringen. (1p)
(e) Definiera tältfunktionerna i V_h. Ange en explicit formel för den tältfunktion som är associerad med noden $(0,0)$ i den ursprungliga trianguleringen. (2p)

Problem 2. (a) Låt $f = x(x-1)$ vara definierad på $I = (0,1)$. Dela in intervallet I i tre delintervall av lika längd och låt V_h^0 vara rummet av styckvis linjära, kontinuerliga funktioner på denna indelning som är noll på randen. Beräkna interpolanten $\pi_h f \in V_h^0$ och L_2-projektionen $P_h f \in V_h^0$ av f. Rita en figur som visar f, $\pi_h f$, samt $P_h f$. (3p)
(b) Definiera $\|g\|_{L_\infty(I)}$ samt $\|g\|_{L_2(I)}$ för en funktion g definierad på I. Beräkna

$\|f\|_{L_\infty(I)}$ samt $\|f\|_{L_2(I)}$ för $f = x(x-1)$ och $I = (0,1)$. (1p)
(c) Formulera uppskattningar för interpolationsfelet $v - \pi_h v$ och dess derivata $(v - \pi_h v)'$ i maxnormen. Bevisa en av dessa. (4p)
(d) Vilka antaganden måste man göra på funktionen v för att högerledet i dina uppskattningar kan förväntas bli litet när indelningen av intervallet görs finare? (1p)

Problem 3. Betrakta problemet

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f, \quad \text{i } \Omega, \tag{1}$$

$$u = g_D, \quad \text{på } \partial\Omega. \tag{2}$$

(a) Förklara all ingående notation samt ange vad som är givna data och vad som söks. (2p)
(b) Ange en fysikalisk tolkning till problem (1)–(2). (2p)
(c) Låt $f = \sin(xy)$ och $b = (1,1)$. Beräkna: ∇f, Δf, $\nabla \cdot (x\nabla f)$, $b \cdot \nabla f$. (2p)
(d) Antag att $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $a = 1, c = 1$, och $g_D = 0$, samt att u har formen $u = (\alpha - x^2 - y^2)/4$. Bestäm α och f så att u är en lösning till problem (1)–(2). (2p)
(e) Antag att $g_D = 0$. Härled en variationsformulering av (1)–(2). (2p)

Problem 4. (a) Antag att $g_D = 0$. Formulera finita element-metoden för (1)–(2). (2p)
(b) Härled ett linjärt ekvationssystem som bestämmer finita element-lösningen U. (4p)
(c) Härled Galerkin-ortogonalitetsekvationen som felet $u - U$ uppfyller. (2p)
(d) Formulera och bevisa en a priori-feluppskattning för finita elementmetoden. (2p)

Problem 5. Låt Ω vara triangeln med hörn i $(0,0), (0,h)$ och $(h,0)$. Inför nodnumreringen $N_1 = (0,0)$, $N_2 = (0,h)$, $N_3 = (h,0)$, och låt φ_1, φ_2, φ_3 vara de associerade tältfunktionerna.
(a) Beräkna massmatrisen M med element $m_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j$. (2p)
(b) Beräkna styvhetsmatrisen A med element $a_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$. (1p)
(c) Beräkna lastvektorn b med element $b_i = \int_\Omega f\varphi_i$, då $f = 1$. (1p)
Ledning: Använd lämpliga kvadraturformler.

Problem 6. Betrakta en triangel med hörn i noderna $N_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ numrerade i moturs riktning.
(a) Härled ett uttryck för arean av triangeln. (2p)
(b) Härled en formel för gradienten av basfunktionen ϕ_1. (3p)

Problem 7. Betrakta systemet av ordinära differentialekvationer

$$M\dot{\xi} + A\xi = b, \quad \text{i } (0, T), \tag{3}$$
$$\xi(0) = \xi^0. \tag{4}$$

(a) Antag att

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dela in tidsintervallet $(0, 1)$ i två lika långa tidssteg och beräkna en approximation av $\xi(1)$ med bakåt Euler. (2p)
(b) Betrakta

$$\dot{u} - \nabla \cdot (a\nabla u) = f, \quad \text{i } \Omega \times (0, T), \tag{6}$$
$$u(x, 0) = u_0, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$
$$-n \cdot a\nabla u(x, t) = \gamma(u(x, t) - g_D(x, t)) + g_N(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \in (0, T). \tag{8}$$

Härled systemet av ordinära differentialekvationer (3)–(4) genom att diskretisera (6)–(8) i rummet. (2p)