Deltentamen i Differentialekvationer och tekniska beräkningar för Kb. 24 September 2001, 13.15–15.00, inga hjälpmedel. Totalt 30p.

Problem 1. (a) Beskriv konstruktionen av rummet V_h av kontinuerliga styckvis linjära funktioner definierade på intervallet (a,b), inklusive hur en funktion $v \in V_h$ kan representeras i termer av basfunktioner, rita en figur. (2p)
(b) En funktion v är definierad på intervallet (a,b). Definiera interpolanten $\pi_h v$ av v, rita en figur. (1p)
(c) Formulera uppskattningar för interpolationsfelet $v-\pi_h v$ och dess derivata $(v-\pi_h v)'$. (2p)
(d) Definiera L^2-projektionen $P_h v$ av v. (1p)
(e) Beskriv hur $P_h v$ beräknas i praktiken. (2p)
(f) Definiera $L^2(a,b)$-normen $\|w\|$ av funktionen w samt visa att

$$\|v - P_h v\| \leq \|v - w\| \quad \text{för alla } w \in V_h. \qquad (2p) \tag{1}$$

(g) Hur vet vi att högerledet i (1) kan göras litet? (1p)

Problem 2. (a) Betrakta problemet

$$-(au')' + cu = f \quad \text{i } (0,1), \tag{2}$$
$$u(0) = u(1) = 0, \tag{3}$$

ange vad som är givna data och vad som söks. (1p)
(b) Antag att $a = f = 1$ och $c = 0$. Visa att $u = x(1-x)/2$ är en lösning till problem (2)–(3). (1p)
(c) Härled en variationsformulering av (2)–(3). (2p)
(d) Formulera Robinrandvilkor och förklara hur du approximerar det homogena Dirichletvillkoret (3). (2p)

Problem 3. (a) Formulera finita element metoden för (2)–(3). (2p)
(b) Beskriv hur finita element approximationen U beräknas inklusive härledning av linjärt ekvationssystem. (4p)
(c) Förklara varför

$$\int_0^1 a(u-U)'v' + \int_0^1 c(u-U)v = 0 \quad \text{för alla } v \in \overset{\circ}{V}_h. \tag{4}$$

Där $\overset{\circ}{V}_h$ är rummet av kontinuerliga styckvis linjära funktioner som är noll på randen. (1p)
(d) Visa att det existerar en lösning till din finita element metod i fallet då $a > 0$ och $c > 0$. (2p)

Problem 4. Betrakta problemet

$$\dot{u} - (au')' = f \quad \text{i } (0,1) \times (0,T), \tag{5}$$
$$u(x,0) = u_0 \quad x \in (0,1), \tag{6}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t \in (0,T). \tag{7}$$

Om vi använder finita element metoden i rummet så får vi ett system av ordinära differential ekvationer på formen

$$M\dot{\xi} + A\xi = b \quad \text{i } (0,T), \tag{8}$$
$$\xi(0) = \xi^0. \tag{9}$$

(a) Ange hur den approximativa lösningen $U(x,t)$ uttrycks i termer av $\xi(t)$. (2p)
(b) Formulera bakåt Euler för (8)–(9). (2p)