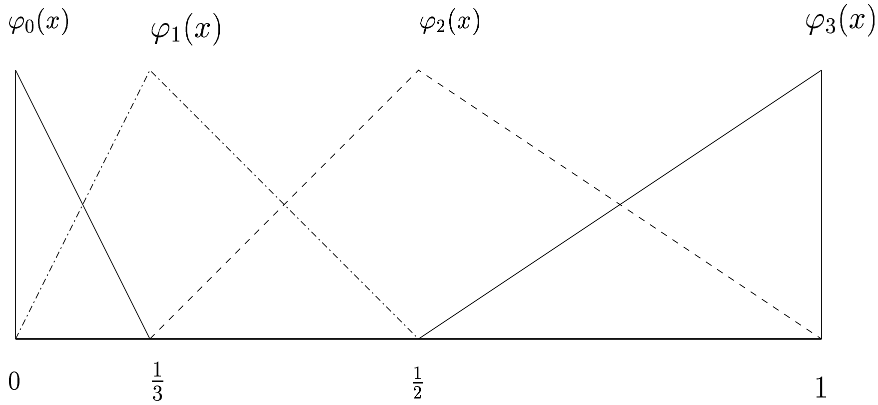
Lösningar till Deltentamen 2002-09-25

TMA225: Differentialekvationer och tekniska beräkningar, del A, för Kb2.

Problem 1. (a) Se Figur 1.



Figur 1: Problem 1(a). Plot av φ_0, φ_1, φ_2 och φ_3.

(b) Det analytiska uttrycket för basfunktionen φ_1 är

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x-0}{1/3-0} = 3x, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ \frac{1/2-x}{1/2-1/3} = 3-6x, & 1/3 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se också Figur 1.

(c) En funktion $v \in V_h$ kan skrivas på formen

$$v(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \varphi_j(x) \quad \text{med } c_j \in \mathbf{R}, \text{ för } j = 0, \dots, N.$$

(d) Basen i V_h^0 är

$$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{N-1}.$$

Problem 2. (a) Interpolanten $\pi_h g \in V_h$ av g är den kontinuerliga, styckvis linjära funktion som antar samma värden som g i noderna, d.v.s.:

- $\pi_h g \in V_h$,
- $\pi_h g(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, \dots, N.$

Därmed kan $\pi_h g$ skrivas:

$$\begin{aligned}\pi_h g(x) &= g(x_0)\,\varphi_0(x) + \cdots + g(x_N)\,\varphi_N(x)\\ &= \sum_{j=0}^{N} g(x_j)\varphi_j(x).\end{aligned}$$

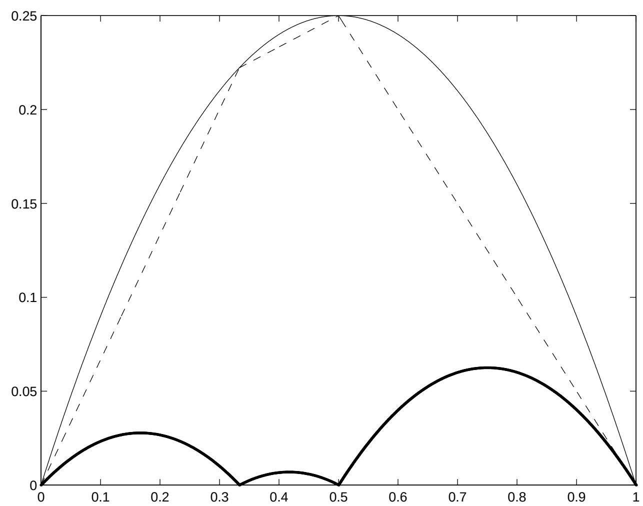
(b) Med

$$g(x) = x(x-1),$$

så har vi

$$\begin{aligned}\pi_h g(x) &= g(0)\,\varphi_0(x) + g(1/3)\,\varphi_1(x) + g(1/2)\,\varphi_2(x) + g(1)\,\varphi_3(x)\\ &= \frac{2}{9}\,\varphi_1(x) + \frac{1}{4}\,\varphi_2(x).\end{aligned}$$

Se Figur 2.



Figur 2: Problem 2(b). Plot av g, $\pi_h g$ (streckad) och $g - \pi_h g$ (fet).

(c) Max normen är definierad av $\|v\|_{L_\infty(I)} := \max_{x\in I} |v(x)|$ och vi har $\|x(x-1)\|_{L_\infty(I)} = \max_{x\in I} |x(x-1)| = 1/4$.
(d) $\|(g - \pi_h g)'\|_{L_\infty(I)} \le C\,\|hg''\|_{L_\infty(I)}$, där $h = h(x)$ är mesh-funktionen för indelningen av intervallet I i delintervall och C är en konstant som är oberoende av h och g.

Problem 3. (a) L^2-projektionen $P_h g \in V_h^0$ av g, är definierad av:

$$\int_0^1 P_h g(x) v(x)\,dx = \int_0^1 g(x) v(x)\,dx \quad \text{för alla } v \in V_h^0. \tag{1}$$

Eftersom $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ är en bas för V_h^0 så är (1) ekvivalent med:

$$\int_0^1 P_h g(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,\varphi_i(x)\,dx \quad \text{för } i = 1, 2. \tag{2}$$

Insättning av ansatsen $P_h g(x) = \sum_{j=1}^{2} \xi_j\,\varphi_j(x)$ i (2) ger:

$$\sum_{j=1}^{2} \xi_j \underbrace{\int_0^1 \varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,dx}_{m_{ij}} = \underbrace{\int_0^1 g(x)\,\varphi_i(x)\,dx}_{b_i} \quad \text{för } i = 1, 2. \tag{3}$$

På matrisform kan (3) skrivas:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Beräkning av elementen i massmatrisen ger

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Inverterar vi matrisen M får vi

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \frac{18}{15} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Av symmetriskäl har vi $b_1 = b_2 =: b$ vilket ger

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{18b}{5}. \tag{5}$$

Det återstår att beräkna $b = b_1 = b_2$. Vi har

$$b_1 = \int_0^h x(1-x)x/h\,dx + \int_h^{2h} x(1-x)(2h-x)/h\,dx,$$

med $h = 1/3$. För den första integralen

$$\int_0^h x(1-x)x/h\,dx = \left[\frac{x^3}{3h} - \frac{x^4}{4h}\right]_0^h = \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} = \frac{1}{36},$$

och för den andra

$$\int_h^{2h} x(1-x)(2h-x)/h\,dx = \int_h^{2h} x(1-x)2\,dx - \int_h^{2h} x(1-x)x/h\,dx,$$

där

$$\int_h^{2h} x(1-x)2\,dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_h^{2h} = 3h^2 - \frac{14h^3}{3} = \frac{13}{81},$$

och

$$\int_h^{2h} x(1-x)x/h\,dx = \left[\frac{x^3}{3h} - \frac{x^4}{4h}\right]_h^{2h} = \frac{7h^2}{3} - \frac{15h^3}{4} = \frac{13}{108}.$$

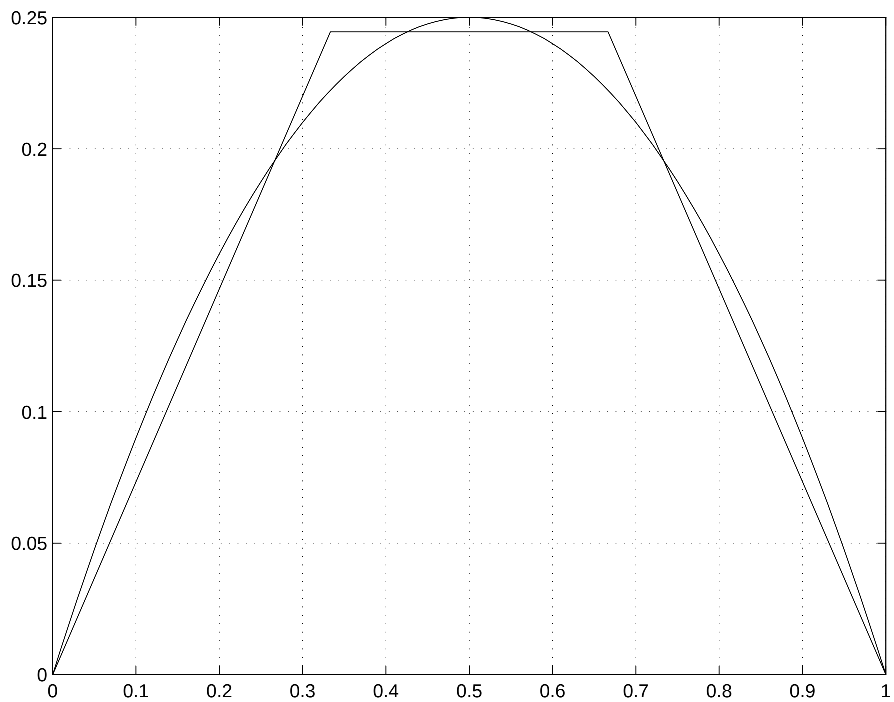
Summering av bidragen ger

$$b = \frac{1}{36} + \frac{13}{81} - \frac{13}{108} = \frac{11}{18*9}$$

Insättning av b i (5) ger

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{18}{5} * \frac{11}{18*9} = \frac{11}{45}.$$

Resultatet illustreras i Figur 3.



Figur 3: Problem 3(a). Plot av g och $P_h g$.

(b) Teoriuppgift, se föreläsningsanteckningar.

(c) Definitionen av L^2-normen är: $\|w\|_{L^2(I)} = \left(\int_I w^2 dx\right)^{1/2}$. Med $w = x^5$ och $I = [0,1]$ får vi

$$\|x^5\|^2_{L^2(I)} = \int_0^1 x^{10} dx = \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1 = \frac{1}{11}.$$

Vilket ger $\|x^5\|_{L^2(I)} = 1/\sqrt{11}$.

Problem 4. Vi betraktar problemet

$$-\left((1+x)u'\right)' + xu = f, \tag{6}$$
$$u(0) = 2u'(1) = 0. \tag{7}$$

(a) Funktionen $u(x) = x(1-x)^2$ uppfyller randvillkoren (7) ty:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0(1-0) = 0 \\ u'(x) &= \left(x(1-x)^2\right)' = (1-x)^2 - 2x(1-x) \\ u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Vi beräknar $f(x)$ genom att sätta in $u(x) = x(1-x)^2$ i vänsterledet på ekvationen (6). Vi har

$$u'(x) = 1 - 2x + x^2 + 2(x - x^2) = 1 - x^2$$
$$\left((1+x)(1-x^2)\right)' = (1-x^2) + (1+x)(-2x) = (1+x)(1-3x)$$

och insättning i (6) ger att

$$\begin{aligned} -(1+x)(1-3x) + x(1-x)^2 &= -(1-2x-3x^2) + x(1-2x+x^2) \\ &= -(1-2x-3x^2) + x - 2x^2 + x^3 \\ &= -1 + 3x + x^2 + x^3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(c) För att implementera randvillkoret $u(0) = 0$ sätter vi $\gamma(0) = \infty$ (i praktiken ett stort tal) och $g_D = 0$ i ekvation (4), g_N kan vi här sätta till ett litet tal, vilket som helst, typiskt noll.

För att få $u'(1) = 0$, låter vi $\gamma(1) = 0$ och $g_N = 0$ i ekvation (5), g_D kan vi sätta till vad som helst.

Problem 5. Bakåt Euler för den skalära ordnära differential ekvationen ges av

$$U^0 = u_0,$$
$$\frac{U^n - U^{n-1}}{k_n} + a(t_n)U^n = b(t_n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Löser vi nu ut U^n i termer av U^{n-1} får vi formeln

$$U^0 = u_0,$$
$$U^n = (1 + k_n a(t_n))^{-1}(k_n b(t_n) + U^{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Nu är $U^0 = 1, k_n = 1/2, a(t_n) = 1 + t_n, b(t_n) = 1$, och $T = t_2$ och uppgiften är att räkna ut U^2. Insättning ger

$$U^0 = 1,$$
$$U^n = (1 + (1 + t_n)/2)^{-1}(1/2 + U^{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

och efter lite räkningar $U^1 = 6/7$ och $U^2 = 19/28$.