MATEMATISKA INSTITUTIONEN CTH och GU

Tentamen Analys och linjär algebra del C TMA195 Kb1/Kf1 020118

Provet består av totalt fem (5) uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 10p. Betygsgränser: 3: 25p, 4: 35p, 5: 45p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Hanna Martinsson 0740-459022.

1. (a) Visa att för $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gäller

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma u\, n_i ds, \; i = 1, \; 2.$$

där $Q = [0,1] \times [0,1]$ med rand Γ och utåtriktad enhetsnormal $n = (n_1, n_2)$ i planet.

(b) Visa med hjälp av resultatet i (a) att för $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gäller

$$\int_Q \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx = \int_\Gamma F \cdot ds.$$

2. Bestäm största och minsta värde till $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2 + x_2^3$ på området $D: \; 0 \le x_1 \le 4, \; 0 \le x_2 \le 2x_1$.

3. Låt $u = (\frac{2x_1x_2}{1+x_2^2}, -\log(1 + x_2^2))$, låt γ vara kurvan $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$ och låt n vara den utåtriktade enhetsnormalen med riktning i positiva x_1- och x_2-riktningen. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma u \cdot n\, ds.$$

4. Magnetfältet H kring en enhetsström genom positiva x_3-axeln ges av

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(-x_2, x_1, 0)}{x_1^2 + x_2^2}, \; x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

Beräkna $\nabla \cdot H(x)$ samt $\nabla \times H(x)$ för $x_1^2 + x_2^2 > 0$.

5. Låt γ vara kurvan i planet som har parametriseringen $\gamma : s(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$, $0 \le t \le 2\pi$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\gamma F \cdot ds,$$

för vektorfältet

$$F(x_1, x_2) = \frac{(e^{x_1^2} - x_2^3, e^{x_2^2} + x_1^3)}{\|x\|^4}.$$

Ledning: Resultatet i 1 (b) gäller även för kurvan γ ovan. Använd detta resultat på lämpligt sätt.