MATEMATISKA INSTITUTIONEN CTH och GU

Tentamen Analys och linjär algebra del C TMA195 Kb1/Kf1 010303

Provet består av totalt fem (5) uppgifter. Varje uppgift ger maximalt 10p. Betygsgränser: 3: 25p, 4: 35p, 5: 45p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Anders Logg 0740-459022.

1. (a) Visa att för $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gäller

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma u\, n_i ds,\ i = 1,\ 2.$$

där $Q = [0,1] \times [0,1]$ med rand Γ och utåtriktad enhetsnormal $n = (n_1, n_2)$ i planet.

(b) Visa med hjälp av resultatet i (a) att för $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller

$$\int_Q \operatorname{div} F dx = \int_\Gamma F \cdot n\, ds.$$

(c) Visa med hjälp av resultatet i (a) att för $v, w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gäller

$$\int_Q \frac{\partial v}{\partial x_i} w\, dx = \int_\Gamma v\, w\, n_i ds - \int_Q v \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx,\ i = 1,\ 2,$$

2. Bestäm största och minsta värde till $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 - 2x_2 + 10$ på triangeln som begränsas av linjerna $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ samt $2x_1 + x_2 = 4$.

3. (a) Beräkna arean av funktionsytan $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ på området Ω som definieras av $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$.

(b) Låt $F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 2x_3^2)$ och låt S vara ytan i (a). Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma F \cdot ds.$$

där Γ är randkurva till S med riktning moturs sedd från punkten $(0, 0, 2R)$.

4. I datorstudion behandlade Du vid ett tillfälle extremvärdesundersökning med steepest descent-metoden och vid ett annat tillfälle konstruerade Du ett program som beräknade dubbelintegralen numeriskt på en rektangel. Beskriv dessa två laborationer med egna ord. Beskrivningen skall vara instruktiv så att det framgår hur steepest descent-metoden fungerar och hur dubbelintegralen konstrueras på en rektangel.

5. Beräkna

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx$$

där

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2} e^{x_1 + x_2}$$

och

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : \; x_2 \leq x_1 \leq 2 - x_2, \; 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$