Studio 5: Mer om dubbelintegral och integralsatser i 2D.

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt03

17 februari 2003

1 Dubbelintegral över ett generellt område

Det program du skrev i Studio 4 för att beräkna dubbelintegraler är ju begränsat till rektangulära områden. För att numeriskt beräkna dubbelintegraler över mer generella områden måste vi använda något hjälpmedel för att definiera området och sedan dela in det i små bitar. Dessa små delområden behöver förstås inte vara rektanglar, ofta används trianglar istället eftersom det är lättare att anpassa ett triangelnät till en krökt rand.

Ett sådant verktyg kan du starta genom att skriva

```
>> pdetool
```

Matlab startar nu ett nytt fönster med PDE Toolbox. Uppe till vänster under menyerna finns fem knappar med olika ritverktyg, två för rätblock, två för ellipser och en för ett godtyckligt polygonområde.

Som exempel kan du prova att rita området $\Omega = [-1, 1] \times [-0.8, 0.8]$. Klicka på rektangelikonen längst uppe till vänster (under File), placera musmarkören över $[-1; -0.8]$, samt klicka och dra med vänster musknapp. Släpp när markören står över $[1; 0.8]$. För att underlätta ritningen kan du markera Grid och Snap i menyn Options. Detta lägger ut en grid, samt linjerar upp objekten du ritar med griden. Du kan nu dela in området i småtrianglar genom att klicka på ikonen med en triangel på (under Mesh).

För att kunna använda oss av trianguleringen exporterar vårt nät till Matlabs workspace genom att välja Export Mesh... från menyn Mesh. Klicka på OK. Skriv

```
>> whos
```

vid Matlab-prompten så listas alla variabler som finns definierade och deras storlek (både matrisstorlek och hur mycket datorminne de upptar). Om du har lyckats bör det finnas tre matriser `p`, `e` och `t` som definierar nätet. Vi kommer att använda oss av `p` och `t`:

`p` innehåller alla nodpunkters (trianglarnas hörn) koordinater på så sätt att första kolumnen består av första nodens `x` och `y` positioner, andra kolumnen består av andra nodens `x` och `y`, osv. Hur många noder består ditt nät av?

`t` innehåller en kolumn för varje triangel i nätet och i den kolumnen finns nodnummer för de tre noder som ligger i triangelns hörn. (Det finns också en fjärde rad i `t` som vi inte behöver använda nu.) Hur många trianglar består ditt nät av?

Numreringen av trianglar och noder kan man se i toolboxen genom att markera Show Triangel Labels respektive Show Node Labels under menyfliken Mesh.

För att räkna ut integralen över området Ω kan vi nu löpa igenom alla trianglar, beräkna funktionens värde i t.ex. triangelns mittpunkt, multiplicera med triangelns area och summera alla dessa värden. Triangelns mittpunkt och area kan vi räkna ut genom att vi tittar i rätt kolumn i `t`, plockar ut nodnumren för hörnpunkterna och går in i dessa kolumner i `p` för att få koordinatvärden för hörnpunkter.

Uppgift 1: Utgå från mallen `my_quad2DGen.m` som finns på kursens matlabsida och skriv en funktion som räknar ut integralen över ett godtyckligt område beskrivet av `p` och `t`. Jämför med någon integral som du vet värdet på!

2 Integralsatser i 2D

Vi skall nu påbörja studiet av de centrala integralsatserna med start i Kapitel 67 i *Applied Mathematics: Body & Soul*. Den sats vi skall börja med att studera är *Gauss' sats* i $\mathbb{R}^2$, vilken också kallas för *divergenssatsen*. Eftersom Gauss' sats i $\mathbb{R}^2$ involverar både en *dubbelintegral* och en *kurvintegral* börjar vi med att betrakta dessa. Vi kommer att använda oss av *MultiD lab* så det är bra om du börjar med att repetera det vi gjorde i MultiD lab på Studio 3.

2.1 Dubbelintegral i MultiD lab

Starta MultiD lab och definiera på samma sätt som på Studio 3 parameterområdet $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (enhetsskivan), genom att först klicka på "curve" och ange randkurvan[1] $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} = \{(x(s), y(s)) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) : s \in [0, 1]\}$ (enhetscirkeln), och därefter klicka på "domain".

Ange nu $u(x, y) = x/2$ genom att klicka i fältet till höger om $u =$; skriv in $x/2$ i detta fält och tryck på "Return". Notera att u ritas i övre grafikfönstret.

Du kan nu beräkna *dubbelintegralen* $\iint_D u(x, y)\,dxdy$ genom att klicka på "integrate", vilket beräknar dubbelintegralen över D av funktionen i det *övre*

[1] Det kan vara lite besvärligt att skriva i randkurvan, men det bör fungera om du flyttar markören till det fält som du ska skriva in parametriseringen, klickar i fältet och sedan skriver direkt utan att flytta musen.

grafikfönstret. I detta fall blir värdet, som visas i en gul ruta under en liten stund, lika med 0. Varför? Notera att också en indelning av D i deltrianglar visas i grafikfönstren (på samma sätt som vi gjorde ovan). Experimentera nu själv lite grann med olika parameterområden D och olika integrander u. Tänk på att du också kan ange randkurvan B som ett slutet polygontåg; se fotnot på Datorstudioövning 2. Jämför resultaten antingen med beräknade analytiska värden (i de fall detta är möjligt) eller med resultat från `my_quad2D` (om du väljer D som en rektangel) eller `my_quad2DGen`.

Mata nu in $u(x, y) = x/2$ och $v(x, y) = y/2$, samt klicka på "div(u,v)" för att beräkna och rita *divergensen* av vektorfältet $(u, v) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Klickar du nu på "integrate" så beräknas $\iint_D \nabla \cdot (u, v)\, dxdy$. (Det är som sagt alltid funktionen i det övre grafikfönstret som integreras.) Eftersom arean av D är π (enhetsskivan!) och $\nabla \cdot (u, v) = 1$ så borde dubbelintegralen (= volymen) bli lika med π. Stämmer det?

2.2 Kurvintegral i 2D

Redan på Studio 3 beräknade vi kurvintegralen av $u(x, y)$ över randkurvan B genom att klicka på "u ds": prova att räkna ut $\int_B u\, ds$ för fallet ovan med $u(x, y) = x/2$ och B enhetscirkeln. Resultatet bör bli lika med 0 eftersom $\int_B u\, ds$ är proportionellt mot *medelvärdet* av u över B.

Som ett alternativ till att integrera u över B, kan du nu klicka på "crossflow" så beräknas kurvintegralen av $(u, v) \cdot n$ över B (där $n = (n_x, n_y)$ är den *utåtriktade* enhetsnormalen på B, d.v.s. n är en vektor med längd 1 som är riktad vinkelrätt ut från D). Eftersom $(u, v) \cdot n$ är komponenten av (u, v) vinkelrät mot B (positiv om vektorn (u, v) är riktad ut ur D) är $\int_B (u, v) \cdot n\, ds$ ett mått på det totala *flödet* av vektorfältet (u, v) genom B. (Ett negativt värde motsvarar alltså ett nettoinflöde.) Om du tittar i det nedre grafikfönstret så ser du att (för fältet $(u, v) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$) det verkar rimligt att det blir ett nettoutflöde genom B. Stämmer det? Vad blir värdet? Ser det bekant ut?

2.3 Gauss' divergenssats i 2D

Du upptäckte kanske ovan att

$$\iint_D \nabla \cdot (u, v)\, dxdy = \int_B (u, v) \cdot n\, ds, \tag{1}$$

för fältet $(u, v) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Detta är ingen tillfällighet utan den berömda *divergenssatsen*, också kallad *Gauss' sats.*

Uppgift 2: Betrakta några andra fält (u(x, y), v(x, y)) och försök liksom ovan att med "div(u,v)", "integrate' och "crossflow" verifiera att (1) är uppfylld.

2.3.1 Divergens som gränsvärde

Gauss sats' (1) ger oss en möjlighet att få en fysikalisk känsla för vad divergensen av ett vektorfält modellerar: Betrakta en punkt $(\bar{x},\, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ och låt $D_\varepsilon = \{(x,\, y) : \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2} \leq \varepsilon\}$ vara cirkelskivan med radie ε och medelpunkt i $(\bar{x},\, \bar{y})$. Vidare låter vi B_ε beteckna randkurvan till D_ε (B_ε är förstås cirkeln med radie ε och medelpunkt i $(\bar{x},\, \bar{y})$).

Enligt Gauss' sats (1) gäller nu att

$$\iint_{D_\varepsilon} \nabla \cdot (u,v)\, dxdy = \int_{B_\varepsilon} (u,v) \cdot n\, ds. \tag{2}$$

Vidare gäller allmänt för en Lipschitzkontinuerlig funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ enligt *medelvärdessatsen för integraler* att

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} g(x,\, y)\, dxdy = g(x_\varepsilon,\, y_\varepsilon),$$

för någon punkt $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in D_\varepsilon$, och därmed

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint_{D_\varepsilon} g(x,\, y)\, dxdy = g(\bar{x},\, \bar{y}),$$

där vi ånyo utnyttjat att g är Lipschitzkontinuerlig, så att $\lim_{\varepsilon\to 0} g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = g(\bar{x}, \bar{y})$.

Om vi därmed i (2) dividerar med $\pi\varepsilon^2$ och låter $\varepsilon \to 0$ fås för $g = \nabla \cdot (u,\, v)$

$$[\nabla \cdot (u,\, v)](\bar{x},\, \bar{y}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{B_\varepsilon} (u,\, v) \cdot n\, ds. \tag{3}$$

Låt oss nu anta att $(u,\, v)$ representerar en strömning, t.ex. av en vätska. Eftersom $\int_{B_\varepsilon} (u,\, v) \cdot n\, ds$ är ett mått på *nettoutflödet* genom B_ε kan vi betrakta *divergensen* av $(u,\, v)$ som ett mått på *produktionen* i punkten $(\bar{x},\, \bar{y})$ per areaenhet av det strömmande mediet.

Uppgift 3: Betrakta fältet $(u,\, v) = (\sin(xy),\, 3x^2y + xy^2)$. Verifiera analytiskt att $\mathrm{div}(u,\, v) = \nabla \cdot (u,\, v) = y\cos(xy) + 3x^2 + 2xy$. Låt $(\bar{x},\, \bar{y}) = (0.2,\, 0.3)$, för vilka (verifiera!) $\mathrm{div}(u,\, v) \sim 0.5395$. Försök nu att med hjälp av (3) i MultiD Lab approximativt beräkna detta värde!

Tips: Välj ett litet ε, t.ex. $\varepsilon = 0.1$. Du kan sedan definiera kurvan B_ε genom att klicka på “curve” och ange parametriseringen $x(s) = 0.2 + 0.1 * \cos(2 * \mathrm{pi} * s)$ och $y(s) = 0.3 + 0.1 * \sin(2 * \mathrm{pi} * s)$. Definiera u och v som vanligt (glöm inte att det skall vara “punktvisa” operationer, t.ex. $u = \sin(x. * y)$) och beräkna kurvintegralen i (3) genom att klicka på “crossflow”. Dividera slutligen resultatet med $\pi\varepsilon^2$. Verkar det stämma?[2]

[2] Betrakta gärna en följd av avtagande ε, t.ex. $\varepsilon = 0.5,\, 0.1,\, 0.01$, och se ifall du får bättre och bättre approximationer.

2.4 Stokes' sats i 2D

Precis som Gauss' sats kopplar divergensen i ett område med normalflödet över randen, finns det ett samband mellan rotationen och tangentflödet längs randen,

$$\iint_D \nabla \times (u,\, v)\, dxdy = \int_B (u,\, v) \cdot t\, ds, \tag{4}$$

för fältet $(u,\, v)$. Här är t den *positivt orienterade* enhetstangentvektorn, d.v.s. t är en vektor med längden 1 som pekar längs med B och är riktad så att om du promenerar i tangentvektorns riktning har du området D *till vänster* om dig. Man kallar kurvintegralen $\int_B (u,\, v) \cdot t\, ds$ för *cirkulationen* av vektorfältet (u, v) längs kurvan B.

Uppgift 4: Verifiera i MultiD Lab sambandet (4) för vektorfältet med $u(x, y) = -y/2$ och $v(x, y) = x/2$ och t.ex. D som enhetsskivan ($D = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2}) \leq 1\}$).

Tips: För att beräkna cirkulationen klickar du på "work"[3] i MultiD Lab.

2.4.1 Rotationen som gränsvärde

På samma sätt som vi tidigare betraktade divergensen som ett gränsvärde när vi lät D_ε vara en cirkelskiva med radien $\varepsilon \to 0$ kan vi göra motsvarande betraktelse för rotationen. Stokes' sats ger då

$$[\nabla \times (u,\, v)](\bar{x},\, \bar{y}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{B_\varepsilon} (u,\, v) \cdot t\, ds. \tag{5}$$

Om (u, v) fortfarande representerar en strömning ger *rotationen* ett mått på *"virveltendensen"*, eller *"produktion av virvlar"*, av fältet (u, v) i punkten $(\bar{x}, \bar{y})$.

Uppgift 5: Betrakta fältet $(u,\, v) = (\sin(xy),\, 3x^2y + xy^2)$. Verifiera analytiskt att $\text{rot}(u,\, v) = \nabla \times (u,\, v) = 6xy + y^2 - x\cos(xy)$. Låt $(\bar{x},\, \bar{y}) = (0.2,\, 0.3)$, för vilka (verifiera!) $\text{rot}(u,\, v) \sim 0.2504$. Försök nu att med hjälp av (5) i MultiD Lab approximativt beräkna detta värde!

2.5 Introduktion till rotationsfria fält

Fält som inte ger upphov till cirkulation någonstans, d.v.s. $\nabla \times (u, v) = 0$ överallt, har lite speciella egenskaper. De kan nämligen alltid representeras som gradienten av en potential.

Betrakta fältet $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ där

$$u(x, y) = \frac{-(y - 0.6)}{(x - 0.4)^2 + (y - 0.6)^2}$$
$$v(x, y) = \frac{x - 0.4}{(x - 0.4)^2 + (y - 0.6)^2}$$

[3] Namnet kommer av att om vi betraktar (u, v) som ett kraftfält så ger kurvintegralen *arbetet* som fältet uträttar på en partikel som rör sig längs B.

Uppgift 6: Beräkna analytisk rotationen av detta fält. Är det rotationsfritt?

Uppgift 7: Testa nu, m.h.a MultiD Lab, att räkna ut cirkulationen av $f(x, y)$ längs cirkeln med radie 0.5 och med centrum i origo. Vad blir resultatet?

Uppgift 8: Prova att istället räkna ut integralen längs cirkeln med radie 1 och fortfarande centrum i origo. Får du samma resultat? Vad är skillnaden i dessa två exempel?