Studio 3: Steepest Descent och MultiD-lab.

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt03

31 januari 2003

1 Steepest Descent

I Studio 2b plottade vi grafen till funktionen

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^2 - 15y.$$

och bestämde dess extrempunkter. Du ska nu skriva ett program som använder Steepest Descent-metoden (se *AMBS* ch 54.10-11) för att bestäm minimipunkter till funktioner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Använd mallen `SD.m` som finns på webben och utnyttja funktionen `jacobi.m` som du skrev i ALA-B för att beräkna gradienten.

Uppgift 1: Utgå från startpunkten (0,0) och bestäm mha av programmet f:s minimipunkt. Bestäm även f:s maximipunkt med programmet, hur ska du gå till väga för att göra detta?

2 Multi D lab

Vi skall nu bekanta oss med ett MATLAB-program som heter "Multi D lab", och vars syfte är att illustrera centrala moment i flervariabelanalys.

2.1 Starta Multi D lab

Börja med att skriva

```
>> setmatlabpath
```

för att lägga till de bibliotek som behövs till MATLAB:s sökväg. Därefter kan du med kommandot

```
>> open('MD.fig')
```

starta "Multi D lab".

2.2 On-line hjälp

Om du klickar på "help" så öppnas ett hjälpdokument i din web-läsare. Där kan du läsa mer om vad du kan göra i Multi D lab, samt följa en guidad tur ifall du vill!

2.3 Vektorfält i planet

Vi betraktar vektorfält i planet, $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, d.v.s. funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, och startar med det enkla exemplet $u(x,y) = \frac{x}{2}$ och $v(x,y) = \frac{y}{2}$. Innan vi kan rita detta vektorfält i Multi D lab måste vi specificera ett parameterområde D i $\mathbb{R}^2$: Börja med att klicka på knappen "curve" längst nere i vänstra hörnet och ange därefter randkurvan B till området. Kurvan ges på parameterform[1] $\{(x(s), y(s)) : s \in [0,1]\}$. Default är $x(s) = \cos(2\pi s)$ och $y(s) = \sin(2\pi s)$ vilket motsvarar att B är enhetscirkeln. Klicka på "ok" för att acceptera denna randkurva.

För att definiera parameterområdet D (med randkurva B) klickar du nu på knappen "domain". Nu bör du se enhetsskivan i det nedre grafikfönstret.

Vi är nu redo att specificera vektorfältets komponenter u och v: Klicka i fältet till höger om $u =$ (längst uppe till höger), skriv in $x/2$ i detta fält och tryck på "Return". Notera att u ritas i det övre grafikfönstret (så du kan alltså på detta sätt också plotta ytor!). Definiera på samma sätt $v = y/2$.

För att se vektorfältet $(u(x,y), v(x,y))$ klickar du slutligen på "uv field". Vektorfältet visas i det undre grafikfönstret.

Uppgift 2: Rita några andra vektorfält genom att definiera[2] om u och v, t. ex. $u(x,y) = -y/2$ och $v(x,y) = x/2$. (Du kan också definiera om parameterområdet D ifall du vill.) Jämför med de två vänstra bilderna i Figur 61.2 i *Applied Mathematics: Body & Soul*.

2.4 Divergens, rotation, och Laplaceoperatorn i $\mathbb{R}^2$

Antag att du vill beräkna *divergensen* av vektorfältet (u,v). (Om du inte kommer ihåg hur divergensen definieras kan du titta i Avsnitt 61.2 i *Applied Mathematics: Body & Soul.*) Det kan du enkelt göra genom att klicka på "div(u,v)" (förutsatt att du först angett u och v enligt ovan). Divergensen ritas i det övre grafikfönstret. I fallet ovan, $(u,v) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, blir $\nabla \cdot (u,v) = 1$ (varför?).

Analogt kan du beräkna och rita *rotationen* av (u,v) (se längst upp på sidan 883 i *Applied Mathematics: Body & Soul* om du inte minns hur rotationen av ett vektorfält i planet $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieras) genom att klicka på "rot(u,v)". Vad blir rotationen i detta fall? Verifiera analytiskt!

Räkna nu ut $\triangle u$, där $\triangle$ är *Laplaceoperatorn*, genom att klicka på "div(grad u)". I detta fall blir $\triangle u = 0$. Varför?

Uppgift 3: Beräkna och rita divergensen och rotationen av några fler vektorfält, samt beräkna "Laplacen" av några olika funktioner. Jämför med Avsnitt 61.4 i *Applied Mathematics: Body & Soul.*

[1] Du kan alternativt ange B som ett slutet polygontåg genom att i det nedre grafikfönstret klicka i önskade hörnpunkter i *moturs* riktning.

[2] Eftersom `x` och `y` är vektorer måste uttrycken ges på formen för "punktvisa" beräkningar, t. ex. $u = x.*y$

2.5 Kurvintegral

Du kan också beräkna *kurvintegraler* i Multi D lab. Exempel: För att beräkna *båglängden* av kardioiden från Uppgift 1c i förra veckans studioövning börjar du med att definiera randkurvan B enligt (klicka först på "curve" som ovan): $x(s) = (1 - \cos(2\pi s))\cos(2\pi s)$ och $y(s) = (1 - \cos(2\pi s))\sin(2\pi s)$. Klicka nu på "domain" och ange därefter vektorfältskomponent $u(x, y) = 1$. *Obs!!!* Du måste skriva detta som `ones(size(x))` eftersom Multi D lab kräver att `u` och `v` är vektorer. Klicka slutligen på "u ds" så beräknas $\int_B u\, ds$, och eftersom vi i detta fall valt $u(x, y) = 1$ erhålls båglängden. (Den kommer fram i en liten gul ruta.) Jämför Avsnitt 63.2 i *Applied Mathematics: Body & Soul*.

Givetvis kan du också välja andra randkurvor B och integrander $u(x, y)$. Experimentera gärna på egen hand! Du kan också senare försöka att i Multi D lab verifiera svaren på uppgifter i Kapitel 63 i *Applied Mathematics: Body & Soul* där du beräknat värden på kurvintegraler analytiskt. Tänk bara på att parametern s i Multi D lab alltid antas löpa från 0 till 1.

Uppgift 4: Beräkna kardioidens båglängd analytiskt. Se Uppgift 63.15 i *Applied Mathematics: Body & Soul*. Jämför med det svar du fick ovan i Multi D lab!

Tips: För att beräkna integralen i Uppgift 63.15 analytiskt kan den trigonometriska identiteten $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2)$ vara till hjälp!