PROBLEM

XX. Gauss' sats i planet

1. Verifiera Gauss' sats

$$\int_\Gamma F \cdot n \, ds = \iint_\Omega \nabla \cdot F \, dxdy,$$

i specialfallet att $F = (x, y)$ och Γ randen av enhetskuben $\Omega : 0 \leq x, y \leq 1$.

2. Givet kurvorna $s_1 = (t, t - t^2)$ och $s_2 = (1 - t, 0)$ med $0 \leq t \leq 1$.

a. Beräkna tangentvektorn $s'(t)$ till kurvorna.

b. Använd $s'(t)$ för att beräkna enhetsnormaler till s_1 och s_2.
Tips: en enhetsnormal $n = (n_1, n_2)$ är vinkelrät mot tangentvektorn, dvs. skalärprodukten mellan dem är 0. Vidare skall n vara normaliserad, så att $\|n\| = 1$.

c. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{s_1} F \cdot n \, ds + \int_{s_2} F \cdot n \, ds,$$

där $F = (x_1, 0)$ är ett givet vektorfält och n utåtriktad enhetsnormal från det område som s_1 och s_2 omsluter.

d. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_\Omega \nabla \cdot F \, dx_1 dx_2,$$

där $F = (x_1, 0)$ och Ω området som s_1 och s_2 omsluter.

3. Kurvorna $\gamma_1 = (t, \sin t)$ och $\gamma_2 = (\pi - t, 0)$ med $0 \leq t \leq \pi$ innesluter ett område Ω i planet. Använd Gauss' sats för att beräkna

$$\int_{\gamma_1} F \cdot n \, ds + \int_{\gamma_2} F \cdot n \, ds,$$

under förutsättning att n är utåtriktad enhetsnormal till Ω och $F = \left(-\sqrt{1 - y^2},\ y^2\right)$.

4. Antag, att $F = (2x, -y)$ och att Ω är cirkelskivan, som omsluts av enhetscirkeln $\Gamma = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Beteckna den utåtriktade enhetsnormalen från Ω med n och verifiera Gauss' sats

$$\int_\Gamma F \cdot n \, ds = \iint_\Omega \nabla \cdot F \, dxdy.$$

5. Låt T vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ med moturs orienterad rand C. Beräkna m.h.a. Gauss' sats

$$\int_C F \cdot n\, ds,$$

där $F = (x^2 e^{2y}, -xe^{2y})$. Kontrollera svaret genom att parametrisera linjerna, som bildar randen och beräkna kurvintegralen ovan på vanligt sätt.

XXI. Potentialfält

1. Bestäm en potential φ till fältet u då

a. $u(x,y) = (2xy,\ x^2 - y^2)$.

b. $u(x,y,z) = (3x^2y^2z + 2xy,\ 2x^3yz + x^2 + 1,\ x^3y^2)$.

2. Undersök om vektorfältet $F(x,y) = (3y + 2x,\ x)$ är konservativt.

3. a. Undersök om $u(x,y) = (y + 2x, x)$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$. Om så är fallet, bestäm dess potential $\varphi(x,y)$.

b. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma u \cdot dr,$$

där Γ är halvcirkeln $s(t) = (2 + \cos t, 1 + \sin t)$ med $0 \le t \le \pi$.

4. a. Bestäm konstanterna a och b så att fältet $F(x,y) = (4x^3y - 3by^2,\ 2ax^4 - 3xy)$ blir konservativt i $\mathbb{R}^2$.

b. Med a och b valda så att F blir konservativt, beräkna integralen

$$\int_\gamma F \cdot dr,$$

där γ ges av den slutna kurvan $s(t) = (e^t \sin^3 t,\ (t - 2\pi)\sqrt{t})$ med $0 \le t \le 2\pi$.

5. Visa, att om φ är potential till u och $s(t)$ en parametrisering av kurvan Γ, där $\alpha \le t \le \beta$, så är

$$\int_\Gamma u \cdot dr = \varphi(s(\beta)) - \varphi(s(\alpha)).$$

Ledning: kedjeregeln $\dfrac{d}{dt}\varphi(s(t)) = \nabla\varphi(s(t)) \cdot s(t)$.

Svar

XX. Gauss' sats i planet

1. Verifiera innebär att vi skall visa att höger och vänster led ger samma resultat. Gauss' sats lyder

$$\int_\Gamma F \cdot n \, ds = \iint_\Omega \nabla \cdot F \, dxdy,$$

där Γ är randen till enhetskvadraten Ω med utåtriktad och normaliserad normal n. Observera att Ω måste inneslutas av Γ för att satsen skall gälla. Eftersom $\nabla \cdot F = 2$ erhålls HL

$$\iint_\Omega \nabla \cdot F \, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 2 \, dxdy = 2.$$

För att beräkna VL parametriseras de fyra linjesegmenten som utgör randen Γ, t.ex. genom $\Gamma_1 = (t, 0)$, $\Gamma_2 = (1, t)$, $\Gamma_3 = (1 - t, 1)$ och $\Gamma_4 = (0, 1 - t)$ med $0 \le t \le 1$. Rita figur och sätt ut beteckningar! Det inses att linjerna Γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ har normalerna $n_1 = (0, -1)$, $n_2 = (1, 0)$, $n_3 = (0, 1)$ och $n_4 = (-1, 0)$. Flödesintegralen över randen blir då

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F \cdot n \, ds &= \int_{\Gamma_1} F \cdot n \, ds + \int_{\Gamma_2} F \cdot n \, ds + \int_{\Gamma_3} F \cdot n \, ds + \int_{\Gamma_4} F \cdot n \, ds \\
&= \int_{\Gamma_1} (t, 0) \cdot (0, -1) \, ds + \int_{\Gamma_2} (1, t) \cdot (1, 0) \, ds + \int_{\Gamma_3} (1 - t, 1) \cdot (0, 1) \, ds \\
&+ \int_{\Gamma_4} (0, 1 - t) \cdot (-1, 0) \, ds = 0 + \int_0^1 1 \, dt + \int_0^1 1 \, dt + 0 = 2,
\end{aligned}$$

där vi använt parametriseringarna och att $ds = \|\Gamma'(t)\| dt$. HL är alltså lika med VL och Gauss' sats visad i detta fall.

2. a. Eftersom vi har två kurvor - den ena en parabel och den andra en rät linje - får vi två formler för tangentvektorn. Denna ges alltid av vektorn $s'(t)$, dvs. i detta tal är $s_1'(t) = (1, 1 - 2t)$ och $s_2(t) = (-1, 0)$.

b. Normalen n skall vara vinkelrät mot tangentvektorn $s'(t)$. För linjen s_2 är det uppenbart att $n_2 = (0, -1)$ är vinkelrät mot $s_2'(t) = (-1, 0)$ och att $\|n_2\| = 1$. (Vi kunde också valt $n_2 = (0, 1)$.) Parabeln $s_1(t)$ har $s_1'(t) = (1, 1 - 2t)$, dvs. tangenten ändrar riktning längs med kurvan. Villkoret $0 = n_1 \cdot s_1'(t)$ gör att vi kan välja $n_1 = (2t - 1, 1)$ och sedan normalisera till

$$n_1 = \frac{(2t - 1, 1)}{\sqrt{(2t - 1)^2 + 1^2}}.$$

c. Vi använder parametriseringarna av $s_1(t)$ och $s_2(t)$

$$\begin{aligned}
\int_{s_1+s_2} F\cdot n\,ds &= \int_{s_1}(x_1,0)\cdot n_2\,ds + \int_{s_2}(x_1,0)\cdot n_1\,ds \\
&= \int_{s_1}(t,0)\cdot\frac{(2t-1,1)}{\sqrt{(2t-1)^2+1^2}}\,ds + \int_{s_2}(x_1,0)\cdot(0,-1)\,ds \\
&= \int_0^1 (t,0)\cdot\frac{(2t-1,1)}{\sqrt{(2t-1)^2+1^2}}\sqrt{1^2+(1-2t)^2}\,dt + 0 \\
&= \int_0^1 (2t^2-t)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

där vi använt att $ds = \sqrt{x_1'^2+x_2'^2}\,dt$ längs kurvan $s_2(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

d. Vi har divergensen $\nabla\cdot F = 1$, vilket ger

$$\iint_\Omega \nabla\cdot F\,dx_1dx_2 = \iint_\Omega 1\,dx_1dx_2 = \int_0^1\int_0^{x_1(1-x_1)} 1\,dx_1dx_2$$
$$= \int_0^1 [x_2]_0^{x_1(1-x_1)}\,dx_1 = \int_0^1 x_1(1-x_1)\,dx_1 = \left[\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_1^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Rita figur så att integrationsgränserna för Ω blir tydliga. P.g.a. Gauss' sats blir svaret som i tidigare deluppgift.

3. Kurvorna s_1 och s_2 innesluter ett område D, som begränsas av olikheterna $0 \le x \le \pi$ och $0 \le y \le \sin x$. För det givna fältet är $\nabla\cdot F = 2y$, vilket tillsammans med Gauss' sats ger

$$\begin{aligned}
\int_{s_1+s_2} F\cdot n\,ds &= \iint_D \nabla\cdot F\,dxdy = \int_0^\pi\int_0^{\sin x} 2y\,dydx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx \\
&= \int_0^\pi \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x-\tfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4. Betrakta höger led i Gauss' sats. Eftersom $F = (2x, -y)$ erhålls $\nabla\cdot F = 2-1 = 1$, vilket ger

$$\iint_\Omega \nabla\cdot F\,dxdy = \iint_\Omega 1\,dxdy = \pi,$$

där vi utnyttjat att den sista integralen betyder arean av området Ω. Vidare har vi parametriseringen $\Gamma = (\cos t, \sin t)$, dvs. tangenten $\Gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ och normalen $n = (\cos t, \sin t)$. Observera att n är normaliserad och att den pekar ut från Ω. Vidare har vi $ds = \|\Gamma'(t)\|dt = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{1/2}\,dt = dt$, varför

$$\int_\Gamma F\cdot n\,ds = \int_0^{2\pi}(2\cos t, -\sin t)\cdot(\cos t, \sin t)\,dt = \int_0^{2\pi}(2\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt = \pi.$$

Den sista integralen kan lösas genom att använda formlerna $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ och $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$. HL och VL är alltså lika och Gauss' sats verifierad i detta fall.

5. Fältet $F = (x^2e^{2y} - xe^{2y})$ är divergensfritt, $\nabla \cdot F = 2xe^{2y} - 2xe^{2y} = 0$. Eftersom kurvan C omsluter triangeln T kan vi direkt tillämpa Gauss' sats, vilket ger

$$\int_C F \cdot n\, ds = \iint_T \nabla \cdot F dxdy = 0.$$

XXI. Potentialfält

1. a. Potentialen φ uppfyller $u = \nabla\varphi$. Med $u = (2xy, x^2 - y^2)$ innebär detta att

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

Integration m.a.p. y av den övre ekvationen ger $\varphi = x^2y + f(y)$, där $f(y)$ är en funktion som enbart beror på y. För att bestämma $f(y)$ deriveras φ m.a.p. y, vilket ger

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 + f'(y).$$

Jämförelse av resultat med den undre ekvationen ger $f'(y) = -y^2$, vilket medför att $f(y) = -y^3/3 + C$ med C konstant. Alltså är $\varphi = x^2y - y^3/3 + C$ potential till u.

b. Med $u = (3x^2y^2z{+}2xy,\ 2x^3yz{+}x^2{+}1,\ x^3y^2)$ ges en potential φ av ekvationerna

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2xy, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^3yz + x^2 + 1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x^3y^2.$$

Sista ekvationen ger $\varphi = x^3y^2z + f(x, y)$. Använder vi detta φ som ansats i första ekvationen fås $3x^2y^2z{+}f'_x(x, y) = 3x^2y^2z{+}2xy$, vilket ger $f'_x(x, y) = 2xy$ och $f(x, y) = x^2y + g(y)$. Alltså har vi $\varphi = x^3y^2z + x^2y + g(y)$. Insättning av detta i andra ekvationen ger $2x^3yz + x^2 + g'(y) = 2x^3yz + x^2 + 1$. Vi får således $g'(y) = 1$ och därmed $g(y) = y + C$, där C är konstant. Den sökta potentialen är $\varphi = x^3y^2z + x^2y + y + C$.

2. Beräkning ger $\nabla \times F = (0, 0, -2)$, dvs. fältet är inte konservativt eftersom det inte uppfyller det nödvändiga villkoret att dess rotation skall vara noll.

3. a. Ett tillräckligt villkor för att ett fält u skall vara konservativt är att $\nabla \times u = 0$ på en konvex mängd. Vårt fält $u = (y + 2x, x)$ och område $\mathbb{R}^2$ uppfyller detta, varför u är konservativt. Potentialen φ måste uppfylla $u = \nabla\varphi$, dvs.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y + 2x, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x.$$

Genom att integrera den andra ekvationen m.a.p. y fås $\varphi = xy + f(x)$. För att bestämma $f(x)$ deriverar vi m.a.p. x, dvs.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + f'(x)$$

och jämför med den första ekvationen. Om denna skall vara uppfylld måste $y + f'(x) = y + 2x$, vilket medför att $f(x) = x^2 + C$ med C konstant. Således är $\varphi = xy + x^2 + C$ en potential till u. Kontrollera att $\nabla\varphi = u$!

b. Då u är konservativt så är varje kurvintegral i $\mathbb{R}^2$ oberoende av vägen. Det räcker alltså att veta en potential till u samt start- och slutpunkt för att beräkna integralens värde! Med $t \in [0, \pi]$ fås

$$\int_\Gamma u \cdot dr = \varphi(s(\pi)) - \varphi(s(0)).$$

Från tidigare deluppgift vet vi att $\varphi(x, y) = xy + x^2 + C$, vilket kan skrivas $\varphi(t) = (2 + \cos t)(1 + \sin t) + (2 + \cos t)^2 + C$. Således blir integralen

$$\int_\Gamma u \cdot dr = (2 + \cos\pi)(1 + \sin\pi) + (2 + \cos\pi)^2 + C$$
$$-(2 + \cos 0)(1 + \sin 0) - (2 + \cos 0)^2 - C = 2 - 12 = -10.$$

4. a. $\mathbb{R}^2$ är en konvex mängd, varför fältet $F(x, y) = (4x^3y - 3by^2,\ 2ax^4 - 3xy)$ är konservativt om $\nabla \times F = 0$. Vi har rotationen

$$\nabla \times F = (0,\ 0,\ 8ax^3 - 3y - 4x^3 + 6by),$$

så att valet $a = b = \frac{1}{2}$ ger ett virvelfritt fält i hela $\mathbb{R}^2$.

b. Eftersom F är konservativt, så är integralen oberoende av vägen och beror endast på kurvans start- och slutpunkt. Dessa sammanfaller eftersom γ är en *sluten* kurva. I detta fall kan vi ta punkten $(0, 0)$. Antag nu att $\varphi(t)$ är en potential till F. Då gäller

$$\int_\Gamma F \cdot dr = \varphi(2\pi) - \varphi(0) = \varphi(0, 0) - \varphi(0, 0) = 0.$$

Observera att detta resultat gäller generellt för konservativa fält och slutna kurvor.

5. Med $s'(t) = (\partial_t x, \partial_t y)$, dvs. med $dr = (dx, dy)$ erhålles

$$\int_\Gamma u \cdot dr = \int_\alpha^\beta u(s(t)) \cdot s'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \nabla\varphi(s(t)) \cdot s'(t)\, dt$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} \right) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\varphi(s(t))\, dt = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$