PROBLEM

XVII. Ytintegraler

1. Använd uttrycket för arean av en yta med parametriseringen $S = S(u, v)$,

$$A = \iint_{\Omega} \|S'_u \times S'_v\| \, dudv,$$

och visa att det reduceras till

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v} \, dudv,$$

om parametriseringen skrivs $S(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

2. Givet parametriseringen $S(\varphi, \theta) = R(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi$.

a. Beskriv S geometriskt.

b. Beräkna arean av S.

3. Givet parametriseringen $S(\varphi, z) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq z \leq h$.

a. Beskriv S geometriskt.

b. Beräkna arean av S.

4. Givet den parametriserade ytan $S(\varphi, z) = (z\cos\varphi, z\sin\varphi, z)$ med $0 \leq \varphi < 2\pi$ och $0 \leq z \leq h$,

a. Beskriv S geometriskt.

b. Beräkna arean av S.

5. Beräkna massan av cylindern $S(\varphi, z) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)$ med $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq z \leq h$, om ytdensiteten är $\varrho(x_1, x_2, x_3) = x_3(x_1^2 + x_2^2)$.

6. Beräkna ytintegralen

$$Y = \iint_S (xy + z) \, dS,$$

där S är den del av planet $x + y + z = 2$ som ligger i första oktanten.

7. Beräkna flödesintegralen

$$\int_S B \cdot n \, dS,$$

för följande vektorfält och ytor (normalen skall ha negativ z komponent):

a. $B = (xy^2, -2z, 0)$, $S = \{(x, y, z) : z = 2x + y,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4\}$.

b. $B = (1, 2, 3)$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$.

8. Beräkna flödet av fältet

$$\Phi = (x^2 - y^2, (x + y)^2\,, (x - y)^2\,)\,,$$

genom ytan $r(u, v) = (u + v, u - v, uv)$, $-1 \leq u, v \leq 1$, i positiv z riktning.

9. Givet vektorfältet $E = (2x, -z, y)$ och skruvytan $S(u, v) = (u, v\cos u, v\sin u)$ med $0 \leq u \leq \pi$ och $0 \leq v \leq 1$ riktad i positiv z riktning, beräkna flödet

$$\iint_S E \cdot n\, dS.$$

XVIII. Divergenssatsen

1. Använd divergenssatsen och beräkna

$$\iint_S F \cdot n\, dS,$$

där S är mantelytan av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $F(x, y, z) = (2, 2, z)$.

2. Beräkna flödet

$$\iint_S F \cdot n\, dS,$$

av vektorfältet F över randen S till regionen D i följande fall.

a. $F(x, y, z) = (x, y, z)$ och $D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ enhetsklotet.

b. $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ och $D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

c. $F(x, y, z) = (x, y, z)$, $D : 0 \leq x, y, z \leq 1$ enhetskuben i första oktanten.

d. $F(x, y, z) = (x^2, -xz, z^2)$ med D enhetskuben i första oktanten.

3. Låt S vara skalet till halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $z \geq 0$ med utåtriktad normal. Definiera vektorfältet $F(x, y, z) = (3x + z^2, y, x^2 + y^2)$ och beräkna flödet av F över S.

4. Beräkna värdet av integralen

$$\iint_S A \cdot n\, dS,$$

då $A = (x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z)$ och S ytan $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

5. Låt $F = (y^2, x^2, z^2)$ och låt K vara klotet $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$. Beräkna flödet av $\nabla \times F$ genom klotytan ∂K, som antas ha utåtriktad normal n. Observera att det flödet av $\nabla \times F$, och inte flödet av F, som efterfrågas.

6. Låt

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

Visa att flödet av detta vektorfält ur en godtycklig sluten yta S är 0 om origo inte är inneslutet av S.

7. Använd Gauss sats för att beräkna flödet av

$$F(x, y, z) = (ye^z, x^2e^z, xy),$$

ut ur sfären med ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, med $a \geq 0$.

8. Beräkna värdet av integralen

$$\iint_S A \cdot n \, dS,$$

då $A = (x, -y, z)$ och S den sluta ytan som definieras av cylindern $x^2 + y^2 = c^2$ och planen $z = 0$ och $z = d$.

9. Beräkna flödet av $u = (-e^{yz}, e^{xz}, z^2)$ genom struten T, given av $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

10. Låt $F = (x^2z, -y, xyz)$ och använd divergenssatsen för att beräkna

$$\iint_S F \cdot n \, dS,$$

där S är randen till kuben $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, och $0 \leq z \leq a$.

XIX. Stokes' sats

1. Beräkna rotationen av vektorfältet $F = (x - 2z, x + y + z, x - 2y)$.

2. Låt $F = (-y, x, 0)$ och S mantelytan till $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. Parametrisera S med $S(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi/2$ och beräkna följande.

a. Rotationen $\nabla \times F$.

b. En normal $S'_u \times S'_v$ till ytan S uttryckt i u och v.

c. Ytintegralen

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n \, dS,$$

där vektorn $n \, dS = S'_u \times S'_v \, dudv$.

d. Kurvintegralen

$$\oint_\gamma F \cdot dr,$$

där $\gamma = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$ är randen till ytan S.

3. Verifiera Stokes' sats

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot n \, dS,$$

om $F = (yz^2 - y, xz^2 + x, 2xyz)$ och C är cirkeln i planet $z = 0$ med radien 3.

4. Låt S vara den del av planet $z = 4 - x - 2y$, $0 \le x \le 4$ och $0 \le y \le 2 - x/2$, som ligger i första oktanten och har den positivt orienterade randkurvan γ. Använd Stokes' sats för att beräkna

$$\oint_\gamma F \cdot dr,$$

där $F = (y, -z, xy)$.

5. Använd Stokes' sats för att beräkna

$$\oint_\gamma u \cdot dr,$$

där $u = (3z, 5x, -2y)$ och γ är skärningen mellan cylindern $x^2+y^2 = 1$ och planet $z = y + 3$ orienterad moturs sedd uppifrån.

6. En cirkel med centrum i $(2, 6, 5)$ och med radie R ligger i planet $3x + y + z = 5$. Beräkna den s.k. cirkulationen

$$\oint_C F \cdot dr,$$

där $F = (0, 3z + y, 2y)$ längs den moturs orienterade randkurvan C till cirkeln.

7. Låt C vara en cirkel med radie R i planet $x + y + z = 3$. Använd Stokes' sats för att beräkna

$$\oint_C F \cdot dr,$$

där $F = (z^2, x^2, y^2)$ och C är orienterad moturs sett ovanfrån.

8. Låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2 = 1$ och $z = x^2+2y^2$, orienterad moturs sedd uppifrån. Låt $F = (x^2 - y, y^2 + x, 1)$ och beräkna kurvintegralen

$$\oint_{\mathcal{C}} F \cdot dr,$$

m.h.a. Stokes' sats. *Ledning:* låt ytan S vara $z = x^2 + 2y^2$ med $x^2 + y^2 \le 1$. Randen till S är då $\mathcal{C}$, vilket ger $n \, dS = (-2x, -4y, 1) \, dxdy$.

Svar

XVII. Ytintegraler

1. Definitionen i AMBS av S' ger

$$S' = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_u & f'_v \end{pmatrix},$$

varför $S'_u = (1, 0, f'_u)$ och $S'_v = (0, 1, f'_v)$. Vektoriella produkten mellan dem ges av $S'_u \times S'_v = (-f'_u, f'_v, 1)$, dvs. $\|S'_u \times S'_v\| = \sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v}$, vilket ger påståendet.

2. a. S är ytan av en sfär med radie R, jämför med sfäriska koordinater.

b. Ytan blir $4\pi R^2$. Använd att arean ges av

$$\iint_S \|S'_\varphi \times S'_\theta\| \, d\varphi d\theta.$$

Med den givna parametriseringen blir $\|S'_\varphi \times S'_\theta\| = R^2 \sin\theta$.

3. a. S är ytan av en cylinder med radie a och höjd h, jämför parametriseringen med cylindriska koordinater.

b. $2\pi a h$ ($\|S'_\varphi \times S'_z\| = a$)

4. a. S är ytan av en kon med spets i origo och begränsad av planet $z = h$.

b. Ytan av konen blir $\pi\sqrt{2}h^2$ ($\|S'_\varphi \times S'_z\| = \sqrt{2}z$).

5. Den totala massan ges av

$$M = \iint_S \varrho(x_1, x_2, x_3) \, dS.$$

Av parametriseringen fås $\varrho(\varphi, z) = a^2 z$ och $dS = \|S'_\varphi \times S'_z\| \, d\varphi dz = a \, d\varphi dz$, vilket ger $M = \pi a^3 h^2$.

6. Notera att planet kan skrivas $z = f(x, y) = 2 - x - y$, vilket ger

$$Y = \iint_S (xy + 2 - x - y) \, dS.$$

Ytan kan parametriseras med $S(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, 2 - x - y)$ där $0 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2 - x$, eftersom $x, y, z \geq 0$ i första oktanten. Vi har nu

$$\begin{aligned} dS &= \|S'_x \times S'_y\| \, dxdy = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \, dxdy \\ &= \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} \, dxdy = \sqrt{3} \, dxdy, \end{aligned}$$

vilket medför att integralen blir

$$Y = \int_0^2 \int_0^{2-x} (xy + 2 - x - y)\sqrt{3} \, dydx = 2\sqrt{3}.$$

7. a. $-\frac{8}{3}$
   b. -6π

8. $\frac{32}{3}$

9. $-\frac{\pi}{2}(\pi - 1)$

XVIII. Divergenssatsen

1. $\frac{4}{3}\pi$

2. a. 4π
   b. $5\pi/12$
   c. 3
   d. 2

3. Divergenssatsen kan inte direkt tillämpas eftersom S inte är en sluten yta. Lägger vi till cirkelskivan D, given av $x^2 + y^2 \leq b^2$, $z = 0$ så innesluter emellertid S och D volymen av halvsfären $B : x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$, $z \geq 0$. Under förutsättning att normalen till D väljs utåtriktad, ger divergenssatsen

$$\iint_S F \cdot n\, dS + \iint_D F \cdot n\, dS = \iiint_B \nabla \cdot F dxdydz.$$

Volymen av en halvsfär med radie b är som bekant $\frac{2}{3}\pi b^3$ och eftersom $\nabla \cdot F = 4$, fås

$$\iiint_B \nabla \cdot F\, dxdydz = 4 \iiint_B dxdydz = 4 \cdot \frac{2}{3}\pi b^3.$$

Då den positiva enhetsnormalen till D är $n = (0, 0, -1)$, får vi

$$\begin{aligned}\iint_D F \cdot n\, dS &= \iint_D (3x + z^2, y, x^2 + y^2) \cdot (0, 0, -1)\, dS \\ &= \iint_D -(x^2 + y^2)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^b -r^3 dr d\varphi = -\frac{1}{2}\pi b^4,\end{aligned}$$

dvs. den sökta integralen har värdet $\frac{8}{3}\pi b^3 + \frac{1}{2}\pi b^4$.

4. $4\pi R^5$

5. 0

6. Vi erhåller $\nabla \cdot F = 0$, dvs. enligt divergenssatsen är flödet ur varje sluten yta 0 under förutsättning att alla derivator av första ordning är kontinuerliga. I origo är fältet singulärt, dvs. går mot oändligheten, och därför gäller satsen inte i områden som innehåller denna punkt.

7. $0, \nabla \cdot F = 0$

8. $\pi c^2 d$

9. Problemet kan inte direkt lösas med divergenssatsen eftersom T inte utgör hela begränsningsytan till ett område i rummet. Genom att tillfoga det plana locket $L : x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$ uppfylles emellertid detta villkor, ty $T + L$ är en begränsningsyta till käglan $K : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Enligt divergenssatsen har vi därför att

$$\iint_T u \cdot n\, dS = \iiint_K \nabla \cdot u\, dzdyx - \iint_L u \cdot n\, dS.$$

Vidare är $\nabla \cdot u = 2z$. I höjdled är struten begränsad av $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$. Projektionen av struten T på planet $z = 0$ är cirkelskivan $D : x^2 + y^2 \leq 1$, vilket ger

$$\iiint_K \nabla \cdot u\, dzdydx = \iint_D \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 2z\, dzdydx = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dydx$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Eftersom $n = (0, 0, 1)$ är en enhetsnormal på L och z där har värdet 1 får vi

$$\iint_L u \cdot n\, dS = \iint_L (-e^{xy}, e^{xz}, z^2) \cdot (0, 0, 1)\, dS = \iint_L z^2\, dS = \iint_L 1^2 \cdot dS = \pi,$$

dvs. totala flödet genom struten är $\frac{1}{2}\pi - \pi = -\frac{1}{2}\pi$.

10. $\frac{3}{4} a^5 - a^3$

XIX. Stokes' sats

1. $\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x - 2z & x + y + z & x - 2y \end{vmatrix} = -3e_x - 3e_y + e_z = (-3, -3, 1)$

2. a. $\nabla \times F = (0, 0, 2)$

b. $S'_u \times S'_v = \sin v (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$

c.

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n\, dS = \iint_S (\nabla \times F) \cdot (S'_u \times S'_v)\, dudv = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 2 \sin v \cos v\, dudv$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} 2 \sin v \cos v\, dv = 2\pi \int_0^{\pi} \sin(2v)\, dv = 2\pi \left[\frac{1}{2} \cos(2v) \right]_0^{\pi} = 2\pi$$

d. P.g.a. Stokes' sats är den sökta kurvintegralen lika med svaret i deluppgift c.

$$\oint_\gamma F \cdot dr = \oint_\gamma (-y, x, 0) \cdot (dx, dy, dz)$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = 2\pi$$

3. Verifiera innebär att vi måste visa att höger och vänster led i Stokes' sats ger samma svar. Om vi betraktar höger led har vi rotationen $\nabla \times F = (0, 0, 2)$. Cirkelskivan S, som omsluts av kurvan C har uppåtriktad normal $n = (0, 0, 1)$, vilket ger

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot n dS = \iint_S (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 1)\, dS = 2 \iint_S dS = 2\pi 3^2 = 18\pi,$$

där vi i sista ledet använt att arean av cirkeln är $\pi 3^2$. Vänster led får vi som vanligt genom att parametrisera $C = (3\cos t, 3\sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$, dvs.

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C (-y, x, 0) \cdot (dx, dy, 0) = \int_0^{2\pi} (-3\sin t, 3\cos t, 0) \cdot (-3\sin t, 3\cos t, 0)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 9(\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} 9\, dt = 18\pi.$$

Alltså är höger led lika med vänster och Stokes' sats visad i detta fallet.

4. Planet kan parametriseras av $S(x, y) = (x, y, 4 - x - 2y)$. Normalen till planet ges av $S'_x \times S'_y = (1, 2, 1)$. Rotationen av vektorfältet är $\nabla \times F = (1 + x, -y, -1)$, dvs. $(\nabla \times F) \cdot (1, 2, 1) = 1 + x - 2y - 1 = x - 2y$. Stokes' sats ger således

$$\oint_\gamma F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot n\, dS = \int_0^4 \int_0^{2 - x/2} (x - 2y)\, dxdy = -\frac{16}{3},$$

där vi utnyttjat att $dS = \|S'_x \times S'_y\|\, dxdy$ och att $n = \dfrac{S'_x \times S'_y}{\|S'_x \times S'_y\|}$.

5. Beräknar först rotationen

$$\nabla \times u = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix} = (-2, 3, 5).$$

Om Y betecknar det ytstycke i planet $z = y + 3$ som innesluts av γ med normalen $n = (0, -1, 1)$ så blir γ rand till Y med positiv orientering. Stokes' sats ger därför

$$\int_\gamma u \cdot dr = \iint_Y (\nabla \times u) \cdot n\, dS = \iint_Y (-2, 3, 5) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)\, dS$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_Y dS = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\pi = 2\pi,$$

där vi normaliserat n samt fått arean av Y genom att inse att Y är en ellips med halvaxlarna $\sqrt{2}$ och 1.

6. Använd Stokes' sats

$$\int_C F \cdot dr = \int_D (\nabla \times F) \cdot n \, dS,$$

där D är cirkelskivan innesluten av cirkeln C. Vidare, $\nabla \times F = (-1, 0, 0)$. En normalvektor till D med rätt orientering är $n = (3, 1, 1)/\sqrt{11}$, dvs. komponenten i normalriktningen till $\nabla \times F$ är $-3/\sqrt{11}$. Arean av D är πR^2, så cirkulationen vi skall beräkna är $-3\pi R^2/\sqrt{11}$.

7. Rotationen av kraftfältet är $\nabla \times F = (2y, 2z, 2x)$. Om vi låter D vara cirkelskivan i planet $x + y + z = 3$, som har randen C så är $n = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ en uppåtriktad enhetsnormal. Stokes' sats ger således

$$\begin{aligned}\oint_C F \cdot dr &= \iint_D (\nabla \times F) \cdot n \, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (2y, 2z, 2x) \cdot (1, 1, 1) \, dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (2x + 2y + 2z) \, dS = 2\sqrt{3} \iint_D dS = 2\sqrt{3} \iint_D dS = 2\sqrt{3}\pi R^2,\end{aligned}$$

där vi använt oss av arean av cirkelskivan för att beräkna integralen i sista ledet.

8. 2π $(\nabla \times F = (0, 0, 2))$