PROBLEM

XII. Avancerade dubbelintegraler

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_E \frac{y}{x-2y}\,dxdy,$$

då E är parallellogrammen $E = \{(x,y) : 0 \le x+y \le 3,\ 1 \le x-2y \le 4\}$. *Ledning:* inför variablerna $u = x+y$, $v = x-2y$.

2. Låt $\varphi_1 = 1-x-y$, $\varphi_2 = x$ och $\varphi_3 = y$. Beräkna dubbelintegralerna

$$M_{11} = \iint_T \varphi_1\varphi_1\,dxdy, \quad M_{23} = \iint_T \varphi_2\varphi_3\,dxdy, \quad S_{11} = \iint_T \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_1\,dxdy,$$

över triangeln $T : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x$.

3. Beräkna

$$J = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

då D är cirkelringen $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2$, där $0 \le a \le b$. *Ledning:* använd polära koordinater.

4. Teckna ekvationerna för de tre linjer som begränsar triangeln T med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(1,2)$. Beräkna sedan dubbelintegralen

$$\iint_T y\,dxdy.$$

Ledning: dela T i två mindre trianglar vilka är lätta att integrera över och addera resutaten.

5. Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $xy = 1$, $xy = 2$, $xy = 2/x^2$ och $y = 4/x^2$. *Ledning:* låt $u = xy$ och $v = x^2y$.

6. Beräkna

$$I = \iint_K |x+y|\ln|x-y|\,dxdy,$$

där K är området $|x|+|y| \le 1$.

XIII. Trippelintegraler

1. Beräkna

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dzdydx.$$

2. Beräkna

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} 2xy\, dzdydx.$$

3. Beräkna

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^x (x+2z)\, dzdydx.$$

4. Beräkna

$$\iiint_\Omega (x+y+z)\, dzdydx,$$

där Ω är den kub som definieras av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq 1$.

5. Beräkna

$$\iiint_\Omega x\, dzdydx,$$

där Ω är området, som definieras av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$ och $2y \leq z \leq 1+y^2$.

6. Beräkna

$$\iiint_\Omega xz\, dzdydx,$$

där Ω är den kropp, som begränsas av planen $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ och $z=0$.

7. Beräkna

$$\iiint_\Omega x^2 y e^{xyz}\, dzdydx,$$

där Ω är den kub som definieras av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ och $0 \leq z \leq 1$.

8. Beräkna värdet av trippelintegralen

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dzdydx,$$

där $f(x,y,z) = xy\sin z$ och K är kuben $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ och $0 \le z \le \pi$.

9. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_E ze^x\,dxdydz,$$

där E är området $E = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 2z, 0 \le x \le z+2\}$.

10. Beräkna integralen

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\,dxdydz.$$

11. Beräkna

$$\iiint_K \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) dxdydz,$$

då K är kuben $1 \le x \le a$, $1 \le y \le a$ och $1 \le z \le a$.

12. Beräkna

$$\iiint_K x^3 \sin z \cos z\,dxdydz,$$

då K ges av $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ och $0 \le z \le \pi/2$.

13. Beräkna värdet av trippelintegralen

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz,$$

där $f(x,y,z) = 2x + 3y$ och T är tetraedern i första oktanten, som begränsas av koordinatplanen och $2x + 3y + z = 6$.

14. Beräkna värdet av trippelintegralen

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz,$$

där $f(x,y,z) = x + y$ och S är området mellan ytorna $z = 2 - x^2$ och $z = x^2$ från $0 \le y \le 3$.

XIV. Funktionaldeterminanter

1. Funktionaldeterminanten till variabelsubstitutionen $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ och $z = z(u, v, w)$ definieras av

$$\left|\det \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)}\right| = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix}.$$

Beräkna denna då $x(u, v, w) = e^{u-v}$, $y(u, v, w) = e^{u+v}$ och $z(u, v, w) = e^{u+v+w}$.

2. Sambanden mellan cylindriska (r, φ, z) och kartesiska (x, y, z) koordinater ges av

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Beräkna

$$\left|\det \frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, z)}\right| = \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x & \partial_z x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y & \partial_z y \\ \partial_r z & \partial_\varphi z & \partial_z z \end{vmatrix}.$$

3. Sfäriska (r, θ, φ) och kartesiska koordinater relateras genom $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ och $z = r\cos\theta$. Beräkna funktionaldeterminanten för övergång från kartesiska till sfäriska koordinater.

XV. Trippelintegraler i cylindriska koordinater

1. Beräkna

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdydx,$$

där R är cylindern $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq h$.

2. Beräkna

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dxdydz,$$

där E är konen $-2 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ och $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$.

3. Använd cylindriska koordinater för att beräkna volymen av cylindern som begränsas av $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ och $z = 4$.

4. Beräkna volymen av området som innesluts av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$, planet $z = 0$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$.

5. Beräkna

$$\iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

där E är området som ligger i cylindern $x^2 + y^2 = 1$, under planet $z = 4$ och ovanför paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.

XVI. Trippelintegraler i sfäriska koordinater

1. Låt S vara bollen $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ och *teckna* integralen

$$\iiint_S (x^2 + y^2)\, dzdydx,$$

i sfäriska koordinater (observera att $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$).

2. Bestäm

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdydx,$$

där B är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

3. Beräkna volymen av klotet $K : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

4. Massan av en kropp $R \in \mathbb{R}^3$ med densiteten $\rho(x, y, z)$ ges av

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

Beräkna massan av klotet $R : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, vars densitet varierar såsom

$$\rho(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

5. Beräkna integralen

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

där Ω är det område som ligger innaför klotet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Svar

XII. Avancerade dubbelintegraler

1. Med den föreslagna substitutionen övergår integrationsområdet till rektangeln $E' : 0 \le u \le 3,\ 1 \le v \le 4$. Använd sedan sambandet

$$\left|\det \frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\det \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|},$$

för att beräkna

$$dxdy = \left|\det \frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \frac{dudv}{\left|\det \dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|} = \frac{dudv}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = |-\tfrac{1}{3}|\, dudv.$$

Således blir den sökta integralen

$$\iint_E \frac{y}{x-2y}\, dxdy = \iint_{E'} \frac{u-v}{3v} \cdot \frac{dudv}{3} = \frac{1}{9}\int_0^3 \int_1^4 \frac{u}{v} - 1\, dvdu$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^3 (u \ln 4 - 3)\, du = \ln 2 - 1.$$

2. $M_{11} = 1/12$, $M_{23} = 1/24$ och $S_{11} = 1$

3. Vi inför polära koordinater $x = r\cos\varphi$ och $y = r\sin\varphi$. Integrationsområdet ges av $a \le r \le b$ och $0 \le \varphi \le 2\pi$. Funktionaldeterminanten blir som vanligt r, vilket ger

$$J = \iint_D e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_a^b \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b r e^{-r^2}\, dr$$
$$= 2\pi \left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_a^b = \pi\left(e^{-a^2} - e^{-b^2}\right).$$

4. Linjen mellan $(0,0)$ och $(1,2)$ ges av $2x - y = 0$, mellan $(1,2)$ och $(2,1)$ av $x + y = 3$ och mellan $(2,1)$ och $(0,0)$ av $x - 2y = 0$.

Dela sedan T i bitarna T_1 och T_2, där T_1 är triangeln som begränsas av $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ och $(2,1)$. Notera att detta automatiskt bestämmer T_2. Totala integralen I är summan av integralerna I_1 och I_2 över respektive triangel. Vi har således

$$I_1 = \iint_{T_1} y\, dxdy = \int_0^1 y\left(\int_{y/2}^{2y} dx\right) dy = \tfrac{1}{2},$$
$$I_2 = \iint_{T_2} y\, dxdy = \int_1^2 y\left(\int_{y/2}^{3-y} dx\right) dy = 1,$$

dvs. $I = I_1 + I_2 = \frac{3}{2}$.

5. Arean ges av integralen

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\det \frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv,$$

där $D : 1 \leq xy \leq 2,\ 2 \leq x^2y \leq 4$. Med variabelbytet $u = xy$ och $v = x^2y$ övergår området D till rektangeln $D' : 1 \leq u \leq 2,\ 2 \leq v \leq 4$. Vidare har vi

$$\det \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix} = -x^2y = -v \Rightarrow \left|\det \frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \frac{1}{v},$$

och arean av D ges alltså av beräkningen

$$\iint_D dxdy = \iint_{D'} \frac{dudv}{v} = \int_1^2 du \int_2^4 \frac{dv}{v} = \int_1^2 (\ln 4 - \ln 2)\, du = \ln 2.$$

6. Vi noterar att integranden är positiv på hela K, dvs. den byter inte tecken. K begränsas av linjerna $x+y = \pm 1$ och $x-y = \pm 1$, varför det är lämpligt att införa $u = x+y$ och $v = x-y$. Det nya området K' i variablerna (u,v) begränsas av linjerna $u = \pm 1$ samt $v = \pm 1$. Vidare har vi

$$\det \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \det \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\frac{1}{2}$$

och erhåller således

$$\begin{aligned} I = \iint_K |x+y| \ln|x-y|\, dxdy &= \iint_{K'} |u| \ln|v| \frac{dudv}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |u|\, du \int_{-1}^1 \ln|v|\, dv \\ &= \int_0^1 2u\, du \int_0^1 \ln v\, dv = [v \ln v - v]_0^1 = -1, \end{aligned}$$

där vi använt att $\lim_{v\to 0} v \ln v = 0$.

XIII. Trippelintegraler

1. Lösning

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dzdydx &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \left(\int_0^{xy} 1\, dz \right) dydx \\ = \int_0^1 \int_{x^2}^x [z]_0^{xy}\, dydx &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

2. Lösning

$$\int_0^1\int_x^{2x}\int_0^{x+y} 2xy\,dzdydx = \int_0^1\int_x^{2x} [2xyz]_0^{x+y}\ dydx$$
$$= \int_0^1\int_x^{2x} 2xy(x+y)\,dydx = \int_0^1\int_x^{2x} (2x^2y+2xy^2)\,dydx$$
$$= \int_0^1 \left[x^2y^2+\frac{2xy^3}{3}\right]_x^{2x} dx = \int_0^1 \left(x^2(2x)^2+\tfrac{2}{3}\,x(2x)^3\right)-\left(x^4+\tfrac{2}{3}\,x^4\right)\,dx$$
$$= \int_0^1 \tfrac{23}{3}\,x^4\,dx = \tfrac{23}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{23}{15}$$

3. 1/10

4. 3/2

5. 1/10

6. 1/120

7. $e-5/2$

8.

$$\iiint_K xy\sin z\,dzdydx = \int_0^\pi x dx\int_0^\pi y dx\int_0^\pi \sin z dz = \pi^2/2\cdot\pi^2/2\cdot 2 = \pi^2/4$$

9. $2e^2(e-2)-2/3$. Börja med att integrera m.a.p x, sedan y och sist z. Använd partialintegration på z-integralen.

10. Lösning

$$\int_0^1\int_0^z\int_0^y ze^{-y^2}\,dxdydz = \int_0^1\int_0^z \left[xze^{-y^2}\right]_0^y\,dydz = \int_0^1\int_0^z yze^{-y^2}\,dydz$$
$$= \int_0^1 \left[-\tfrac{1}{2}\,ze^{-y^2}\right]_0^z dz = \int_0^1 -\tfrac{1}{2}\,(ze^{-z^2}-z)\,dz = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\,e^{-z^2}+\tfrac{1}{2}\,z^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{4}\,e^{-1}$$

11. $3(a-1)^2\ln a$

12. 1/4

13. Tetraedern T begränsas av planen $x=0$, $y=0$, $z=0$ och $2x+3y+z=6$. Detta medför att $0\le z\le 6-3y-2x$. Projektionen av T på planet $z=0$ innesluts av linjerna $y=0$ och $2x+3y=6$ där $0\le x\le 3$. Integralen av $(2x+3y)$ över T ges därför av

$$\int_0^3\int_0^{2-2x/3}\int_0^{6-2x-3y}(2x+3y)\,dzdydx = 18$$

14. Ytorna $z = 2 - x^2$ och $z = x^2$ skär varandra längs linjerna $x = 1$ och $x = -1$. Integralens gränser är därför $0 \leq y \leq 3$, $-1 \leq x \leq 1$ och $x^2 \leq z \leq 2 - x^2$, vilket ger

$$\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} (x+y)\, dzdxdy = 12$$

XIV. Funktionaldeterminanter

1. Funktionaldeterminanten är absolutbeloppet av determinanten av Jacobianen

$$\left|\det \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{u-v} & -e^{u-v} & 0 \\ e^{u+v} & e^{u+v} & 0 \\ e^{u+v+w} & e^{u+v+w} & e^{u+v+w} \end{vmatrix} = 2e^{3u+v+w}$$

2.

$$\left|\det \frac{d(x,y,z)}{d(r,\varphi,z)}\right| = \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x & \partial_z x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y & \partial_z y \\ \partial_r z & \partial_\varphi z & \partial_z z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

3.

$$\begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_\varphi x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_\varphi y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_\varphi z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

XV. Trippelintegraler i cylindriska koordinater

1. Enligt den första olikheten $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, är cylindern parallell med z-axeln med mittpunkt i origo och radie a. Den andra olikheten $0 \leq z \leq h$ begränsar cylindern i höjdled. Eftersom området är rotationssymmetriskt kring z-axeln beskrivs det enklast med cylindriska koordinater

$$0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a.$$

$$\begin{aligned}
\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz &= \iiint_R (r^2+z^2) r\, drd\varphi dz \\
= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^a (r^2+z^2) r\, drd\varphi dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \left[\tfrac{1}{4}\, r^4 + \tfrac{1}{2}\, z^2 r^2\right]_0^a \\
= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(\tfrac{1}{4}\, a^4 + \tfrac{1}{2}\, z^2 a^2\right) dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\tfrac{1}{4}\, a^4 z + \tfrac{1}{6}\, z^3 a^2\right]_0^h \\
= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4}\, a^4 h + \tfrac{1}{6}\, a^2 h^3\right) d\varphi &= \tfrac{1}{6}\, \pi a^2 h (3a^2 + 2h^2).
\end{aligned}$$

2. Projektionen av E på planet $z = 0$ är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$. Den undre ytan av E beskrivs av $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och den övre av planet $z = 2$. Konen beskrivs enklast i cylindriska koordinater $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ och z med $0 \leq r \leq 2$, $r \leq z \leq 2$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. M.h.a. sambandet $dxdydz = r\,dzdrd\varphi$ fås integralen

$$\begin{aligned}\iiint_E (x^2 + y^2)\,dxdydz &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\,dzdydx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 \cdot rdzdrd\varphi = \tfrac{16}{5}\pi.\end{aligned}$$

3. 16π

4. Olikheterna för området som innesluts är i cylindriska koordinater $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq z \leq 4 - r^2$. Vi får

$$\begin{aligned}\iiint_D dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{4-r^2} r\,dzdrd\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r^2)r\,drd\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \tfrac{1}{4}\,r^4\right]_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \tfrac{7}{4}\,d\varphi = \tfrac{7}{2}\,\pi.\end{aligned}$$

5. $12K\pi/5$

XVI. Trippelintegraler i sfäriska koordinater

1.

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} (r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^4 \sin^3\theta\, drd\theta d\varphi\end{aligned}$$

2. Eftersom klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ är helt rotationssymmetriskt inför vi sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ och $z = r\cos\theta$. I dessa koordinater beskrivs klotet såsom $0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq a$. Volymselementet är $dxdydz = r^2 \sin\,\theta drd\theta d\varphi$ och $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, vilket medför att integralen blir

$$\begin{aligned}\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r^4 \sin\theta drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{5}r^5\right]_0^a \sin\theta\, d\theta d\varphi = \tfrac{1}{5}\,a^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta d\varphi \\ &= \tfrac{1}{5}\,a^5 \int_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi} d\varphi = \tfrac{1}{5}\,a^5 \int_0^{2\pi} 2d\varphi = \tfrac{4}{5}\pi a^5.\end{aligned}$$

3. Totala volymen av en kropp K fås genom att dela in denna i infinitesimalt små kuber med volymen $dxdydz$ och sedan summera över dessa m.h.a. integraler. I vårt fall är K klotet $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, vilket enkelt beskrivs i sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ och $z = r\cos\theta$, där $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Volymen av klotet blir alltså

$$V = \iiint_K dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

4. 6π

5. Inför sfäriska koordinater. Klotet och konen får då ekvationerna $r = 1$ respektive $\theta = \pi/4$ och integrationsområdet Ω bestäms av olikheterna $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Alltså är

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz = \iiint_\Omega r \cdot r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{4}.$$