PROBLEM

A. Ortogonalprojektion

1. Låt $x = (1, -1, 0, 2)$ och $y = (3, -1, 1, 1)$.

a. Beräkna $x \cdot y$.

b. Beräkna vinkeln mellan vektorerna x och y.

c. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $x - y$ och $x + y$.

2. Låt $e = (2, 1, 2, 1)$ och $w = (1, 2, -3, 4)$. Bestäm talet s så att vektorn $se + w$ blir ortogonal mot e.

3. Ortogonalisera följande vektorer med Gram-Schmidts metod.

$$v_1 = (1, 2, 3)^T, \qquad v_2 = (3, 2, 1)^T.$$

4. Låt $e_1 = (2, 1, 0, 1)$, $e_2 = (0, 2, 1, -2)$ och $w = (1, 2, 1, 2)$. Visa, att e_1 och e_2 är ortogonala och bestäm sedan talen s_1 och s_2 så att vektorn $s_1 e_1 + s_2 e_2 + w$ blir ortogonal mot både e_1 och e_2.

5. Låt V vara ett underrum till $\mathbb{R}^m$ med dimensionen $n < m$ och låt V spännas av kolonnerna i matrisen $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Projektionsmatrisen P för ortogonalprojektion på V ges av

$$P = Q(Q^T Q)^{-1} Q^T.$$

Visa, att $P = QQ^T$ om kolonnerna i Q är ortonormala.

6. Låt

$$u = (1, 1, 1, 1)^T, \qquad v = (1, -1, 1, -1)^T.$$

och bilda vektorrummet $V = span\{u, v\}$.

a. Verifiera att u och v är ortogonala.

b. Normalisera vektorerna u och v till längden 1. Dessa bildar en ON-bas för vektorrummet V.

c. Bilda (4×2) matrisen Q med vektorerna i ON-basen som kolonner och beräkna projektionsmatrisen $P = QQ^T$.

d. Bestäm ortogonalprojektionen Pw av vektorn $w = (1, 2, 3, 4)$ på V.

7. Ange den ortogonala projektionen av $u = (0, 4, 4, 0)$ på det underrum till $\mathbb{R}^4$ som genereras av vektorerna

$$e_1 = (1, 2, 3, 1)^T, \qquad e_2 = (1, -2, 1, 0)^T.$$

B. Egenvärden

1. Visa, att 5 är ett egenvärde till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Använd t.ex. att $\det(A - \lambda I) = 0$ om λ är ett egenvärde till A.

2. Visa, att $x = (1, 0)^T$ är en egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vilket egenvärde är associerat med denna egenvektor.

3. Beräkna egenvärdena till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Beräkna egenvärden λ och egenvektorer x till matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Givet matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna egenvärdena till A. Visa sedan att matrismultiplikationen $P^T A P$ ger en diagonal matris.

6. Beräkna egenvärden λ och normaliserade egenvektorer x till matrisen

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

7. Visa, att om λ är ett egenvärde till A, så är $1/\lambda$ ett egenvärde till A^{-1}.

8. Visa, A och A^T har samma egenvärden. *Ledning:* studera ekvationerna $Ax = \lambda x$ och $A^T y = \mu y$. Använd att $y^T A x = x^T A^T y$ och visa att $\lambda = \mu$.

I. Partiella derivator och kedjeregeln

1. Beräkna de partiella derivatorna $\partial_x f$ och $\partial_y f$ till var och en av funktionerna

a. $f(x, y) = x^3 + 4y^2 - 4$.
b. $f(x, y) = x^2 - 6x + 2y^4$.
c. $f(x, y) = xy^2$.
d. $f(x, y) = x^3 + 2x^3y^4 - y^4$.

2. Beräkna de partiella derivatorna $\partial_x f$ och $\partial_y f$ till funktionerna

a. $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}$.
b. $f(x, y) = \ln(x^2 + xy)$.
c. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$.
d. $f(x, y) = x^3 e^{xy}$.

3. Derivera partiellt a) $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, b) $\arctan(x_1x_2)$ och c) $e^{2x_1}\sin(x_1 + x_2)$.

4. Beräkna den partiella derivatan f''_{xy} till var och en av funktionerna

a. $f(x, y) = x^5y^2$.
b. $f(x, y) = xy^4 - y^5$.
c. $f(x, y) = 2ye^x$.
d. $f(x, y) = x\ln(xy)$.

5. Bestäm de partiella derivatorna f''_{xx}, f''_{xy} och f''_{yy} till funktionen

$$f(x, y) = x^3 + 4x^2y + 8xy^2 + 2y^3.$$

6. Bestäm den partiella derivatan $f^{(3)}_{xxy}(1, 2)$ till funktionen

$$f(x, y) = \frac{e^{2x-y}}{x + y}.$$

7. Bestäm de partiella derivatorna f''_{xx}, f''_{xy} och f''_{yy} till funktionen

$$f(x, y) = e^{xy} + x\ln y.$$

8. Låt $f(x,y) = xy$ och $x = \cos t,\ y = \sin t$. Använd kedjeregeln

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

för att beräkna df/dt då $t = \pi/2$.

9. Använd kedjeregeln för att beräkna dz/dt om

   a. $z = 3x^2 + 2xy^3, \quad x = t, \quad y = t^2.$
   b. $z = x^3 - 5xy, \quad x = t, \quad y = t.$
   c. $z = x^2y^3 + 3, \quad x = 2t^2, \quad y = t^3.$
   d. $z = x^3y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t.$
   e. $z = xy, \quad x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t.$

10. Antag, att $z = f(x,y)$ är en funktion av två variabler med kontinuerliga partiella derivator. Sätt $x = 3t + 2$ och $y = 2t - 1$. Beräkna dz/dt.

II. Gradient och riktningsderivata

1. Beräkna gradientvektorn

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

till följande funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   a. $f(x,y) = x^2 + y^2.$
   b. $f(x,y) = (x+y)^2.$
   c. $f(x,y) = xy.$
   d. $f(x,y) = x^4 + x^3y - 4xy + y^2.$

2. Bestäm gradienten till funktionerna a) e^{xy}, b) $e^{-x^2-y^2}$, och c) $\ln(x+y)$.

3. Bestäm gradientvektorn $\nabla f(x)$ i punkten $(3,3)$ till följande funktioner

   a. $f(x) = 4x_1^2 + 9x_2^2.$
   b. $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^4 - x_2^5.$
   c. $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$

4. Beräkna längden på gradienten, $|\nabla f|$, i punkten $(1,2)$ om funktionen f ges av

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3.$$

5. Beräkna gradienten i origo för funktionerna

a. $f(x) = f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.
b. $f(x) = f(x, y) = x^2(1 + y^3) + y^2$.

Vad kan sägas om funktionerna f i denna punkt.

6. Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x, y) = x^2y^3,$$

i punkten $(x, y) = (1, 1)$, längs riktningen $v = (1, \sqrt{3})$.

7. Beräkna derivatan i riktningen $(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ av funktionen

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

i punkten $(x, y) = (2, -1)$.

8. Det skalära fältet $\phi(x, y, z) = xyz$ är givet. Beräkna $\nabla\phi$ och riktningsderivatan i riktningen $v = (2, 3, 5)$.

9. Beräkna f'_v av funktionen $f(x, y) = xy$ i riktningen $v = (4, 3)$ och i punkten $(x, y) = (1, 1)$.

10. Bestäm riktningsderivatan f'_v av $f(x, y) = x^2+xy^2$ i punkten $(1, 1)$, i den riktning som ges av vektorn $v = (1, 2)$.

11. Bestäm den riktning i vilken funktionen $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ växer snabbast i punkten $(1, 2)$, samt riktningsderivatan till f i denna punkt. *Ledning:* $f'_v = \nabla f \cdot v = |\nabla f| \cos\theta$ om $|v| = 1$ och θ är vinkeln mellan ∇f och v.

III. Tangentplan

1. Bestäm tangentplanet

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}),$$

till funktionen $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ i punkten $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 2)$.

2. Bestäm tangentplanet till ytan $z = x^2 + x + y^2$ i punkten $(2, 2, 10)$.

3. Taylorutveckla funktionen $f(x, y) = xy$ till första ordning i punkten $(0, 3)$.

4. Bestäm tangentplanet till ytan $z = \sin(x^2 + y^2)$ i origo.

5. Beräkna tangentplanet till funktionsytan $f(x, y) = x^2y$ i punkten $(-2, 1, 4)$.

6. Sök tangentplanet till paraboloiden $f(x, y) = x^2 + y^4 + 1$ i punkten $(1, 1, 3)$ på, ytan.

IV. Partiella differentialekvationer, PDE

1. Visa, att $f(x,t) = x - y$ är en lösning till

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. Visa, att $f(x,t) = 2xy - y^2$ är en lösning till den partiella differentialekvationen

$$y\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) - f = y^2.$$

3. Visa, att $u(x,y) = 2x + 2xy^2 - y^3$ löser den partiella differentialekvationen

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} - 4u = 2y - 8x.$$

4. Visa, att om n är ett godtyckligt heltal och A och B reella tal, så är funktionen $f(x,t) = e^{-n^2bt}(A\cos nx + B\sin nx)$ en lösning till värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{b}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

5. Visa, att om $f(x,t) = (x+ct)^3$ och $g(x,t) = (x-ct)^4$, så är $u(x,t) = f(x,t) + g(x,t)$ en lösning till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

V. Kurvor och ytor

1. Rita följande kurvor för hand eller i *MATLAB*

   a. $f(x,y) = x^2 + y^2$.
   b. $f(x,y) = x^2 - y^2$.
   c. $f(x,y) = \sin x \sin y$.
   d. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

2. Beräkna derivatan $A'(t)$ av vektorn $A(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$. Rita grafen till $A(t)$.

3. En partikel rör sig längs kurvan $\Gamma(t) = (t^2, 3t, 1)$. Beräkna då $t = 3$ a) hastigheten $v = \Gamma'(t)$, b) farten $|v|$ och c) accelerationen $v'(t)$.

4. En partikel rör sig längs kurvan $\Gamma(t) = (\sin t, 3\cos t, t^2)$. Beräkna då $t = \pi/2$ a) hastigheten $v = \Gamma'(t)$, b) farten $|v|$ och c) accelerationen $v'(t)$.

5. Integrera vektorn $\int_0^1 B(t)dt$, där $B(t) = (e^t, \sin t, 2t)$.

6. Beräkna längden $L = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$ på de parametriserade kurvorna

   a. $\Gamma : (x, y) = (\cos t, \sin t),\ \ 0 \leq t \leq \pi.$

   b. $\Gamma : (x, y) = (t, t),\ \ 0 \leq t \leq 4.$

   c. $\Gamma : (x, y) = (t, \cosh t),\ \ -1 \leq t \leq 1.$

Svar

A. Ortogonalprojektion

1. a) 6 b) $\pi/4$ c) $\arccos(-1/\sqrt{5})$

2. $s = -1/5$

3. $u_1 = v_1/\|v_1\| = (1,2,3)^T/\sqrt{14},\ u_2 = (4,1,-2)^T/\sqrt{21}.$

4. $s_1 = -1,\ s_2 = -1/9.$

5. Q:s kolonner ortonormala dvs. $Q^TQ = I$. Projektionen blir

$$P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QI^{-1}Q^T = QIQ^T = QQ^T.$$

Observera att $QQ^T \neq I$ eftersom Q är av typ $(m \times n)$.

6. c)

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $(2,3,2,3)^T$

7. $\frac{2}{3}(1,6,5,2)^T$

B. Egenvärden

1. Matrisen $A - 5I$ är uppåt triangulär med ett element 0 på diagonalen. Alltså är $\det(A - 5I) = 0$.

2. $\lambda = 2$

3. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$, och $\lambda_3 = 1$

4. A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ och $x_2 = (0,1)^T$, $x_1 = (1,-1)^T$.
B: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ och $x_1 = (-1,1)^T$, $x_2 = (1,1)^T$.

5. $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = 15$.

6. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$ och $x_1 = (-1,1)^T/\sqrt{2}$, $x_2 = (1,1)^T/\sqrt{2}$.

I. Partiella derivator och kedjeregeln

1. a. $\partial_x f = 3x^2$, $\partial_y f = 8y$
b. $\partial_x f = 2x - 6$, $\partial_y f = 8y^3$
c. $\partial_x f = y^2$, $\partial_y f = 2xy$

d. $\partial_x f = 3x^2 + 6x^2y^4$, $\partial_y f = 8x^3y^3 - 4y^3$

2. a. $\partial_x f = (y + x^2/y)^{-1}$, $\partial_y f = -x(y^2 + x^2)^{-1}$

b. $\partial_x f = (2x + y)(x^2 + xy)^{-1}$, $\partial_y f = x(x^2 + xy)^{-1}$

c. $\partial_x f = y(x + y)^{-2}$, $\partial_y f = -x(x + y)^{-2}$

d. $\partial_x f = 3x^2e^{xy} + x^3ye^{xy}$, $\partial_y f = x^4e^{xy}$

3. a. $\partial_{x_1} f = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$, $\partial_{x_2} f = x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$

b. $\partial_{x_1} f = x_2(1 + x_1^2x_2^2)^{-1}$, $\partial_{x_2} f = x_1(1 + x_1^2x_2^2)^{-1}$

c. $\partial_{x_1} f = 2e^{2x_1}\sin(x_1 + x_2) + e^{2x_1}\cos(x_1 + x_2)$, $\partial_{x_2} f = e^{2x_1}\cos(x_1 + x_2)$

4. a. $f''_{xy} = 10x^4y$,

b. $f''_{xy} = 4y^3$

c. $f''_{xy} = 2e^x$

d. $f''_{xy} = 1/y$

5. $f''_{xx} = 6x + 8y$, $f''_{xy} = 8x + 16y$, $f''_{yy} = 16x + 12y$

6. $f^{(3)}_{xxy}(1, 2) = -32/27$

7. $f''_{xx} = y^2e^{xy}$, $f''_{xy} = e^{xy}(1 + xy) + y^{-1}$, $f''_{yy} = x^2e^{xy} - xy^{-2}$

8. -1

9. a. $14t^6 + 6t$

b. $3t^2 - 10t$

c. $52t^{12}$

d. $2\cos^4 \sin t - 3\cos^2 t \sin^3 t$

e. $\alpha(b + \beta t) + \beta(a + \alpha t)$

10. Kedjeregeln ger $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{dy}\frac{dy}{dt} = 3\frac{\partial f}{dx} + 2\frac{\partial f}{dy}$.

II. Gradient och riktningsderivata

1. a. $\nabla f = (2x, 2y)$

b. $\nabla f = (2(x + y), 2(x + y))$

c. $\nabla f = (y, x)$

d. $\nabla f = (4x^3 + 3x^2y - 4y, x^3 - 4x + 2y)$

2. a. $\nabla f = (ye^{xy}, xe^{xy})$

b. $\nabla f = (-2xe^{-x^2-y^2}, -2ye^{-x^2-y^2})$

c. $\nabla f = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y}\right)$

3. a) $\nabla f(3,3) = (24, 54)$, b) $\nabla f(3,3) = (0, -303)$, c) $\nabla f(3,3) = (9,9)$

4. $\sqrt{153}$

5. a) och b) $\nabla f(0,0) = (0,0)^T$ stationär punkt

6. $1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$

7. $-21/\sqrt{5}$

8. $(2yz + 3xz + 5xy)/\sqrt{38}$

9. $7/5$

10. $7/\sqrt{5}$

11. Maximala riktningsderivatan är $|\nabla f(1,2)| = \sqrt{5}/2$ i riktningen $v = (-1,-2)/\sqrt{5}$, dvs. i gradienmtens riktning.

III. Tangentplan

1. $z = 8x + 12y - 20$

2. $z = 5x + 4y - 8$

3. $z = 3x$

4. $z = 0$

5. $4x - 4y + z + 8 = 0$

6. $z = 2x + 4y - 3$

IV. Partiella differentialekvationer, PDE

-

V. Kurvor och ytor

1. -

2. $A'(t) = (-\sin t, \cos t, 2)$

3. a) $v = (6,3,0)$, b) $\sqrt{45}$, c) $v' = (2,0,0)$

4. a) $v = (0,-3,\pi)$, b) $\sqrt{9+\pi^2}$, c) $v' = (-1,0,2)$

5. $(e-1, 1-\cos 1, 1)$

6. a) π, b) $4\sqrt{2}$, c) $e - 1/e$