Lösningsförslag till
Tentamen Analys och linjär algebra, del C TMV035 K1/Kf1/Bt1
030313 V em

1. Vi kan skriva om differentialekvationen på matrisform

$$u'(t) = Au(t),$$

där $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vi beräknar egenvärden till A,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1.$$

Lös $(A - \lambda I)g = 0$.

i) $\lambda_1 = 1$, ansats $g_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow b$ fri, $b = s, \ a = b = s \Rightarrow g_1 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, s godt tal.

ii) $\lambda_1 = -1$, ansats $g_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow b = t, a = -b = -t \Rightarrow g_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi får alltså lösningen

$$u(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger

$$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}.$$

Vi löser ut c_1 och c_2,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

2 a) Enligt *AMBS*, sidan 807, är det en kurva $g : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, sådan att

$$f(g(t)) = c, \quad \text{för } t \in [a, b],$$

där c är en konstant.
b) Derivera uttrycket ovan m.h.a. kedjeregeln så fås

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \nabla f(x) \cdot g'(t) = 0.$$

Eftersom $g'(t)$ är en tangent vektor fås påståendet.

3 a) Enligt definitionen (*AMBS*, sidorna 906 och 916) eller enligt Studio 4 och 5, delar vi in Ω i små delområden, rektanglar eller något annat, beräknar f:s värde i någon punkt i varje delområde, multiplicerar med delområdets area och summerar över alla delområden.
b) Vi väljer en finare indelning, d.v.s. mindre delområden.
c) Felet blir minst när gradienten är liten. Det vi gör är ju att vi approximerar f med en funktion som är konstant på varje delområde, och om gradienten är liten innebär det att f varierar förhållandevis lite på varje delområde så vår approximation är ganska bra.

4 a) Ytan är en halv ellipsoid; skärningen med $x_1 - x_2$-planet blir enhetscirkeln och ytan sträcker sig upp till 2 på x_3-axeln.
b) Området kan parametriseras genom $V(r, u, v) = (r\cos(u)\sin(v), r\sin(u)\sin(v), 2r\cos(v))$, där $r \in [0, 1], u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2]$. Vi beräknar funktionaldeterminanten till

$$\begin{vmatrix} \cos(u)\sin(v) & -r\sin(u)\sin(v) & r\cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\sin(v) & r\cos(u)\sin(v) & r\sin(u)\cos(v) \\ 2\cos(v) & -0 & -2r\sin(v) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -2r^2\cos^2(u)\sin^3(v) - 2r^2\sin^2(u)\sin(v)\cos^2(v) + \\
&\qquad -2r^2\sin^2(u)\sin^3(v) - 2r^2\cos^2(u)\sin(v)\cos^2(v) = \\
&= -2r^2\sin(v)(\cos^2(u)\sin^2(v) + \sin^2(u)\cos^2(v) + \\
&\qquad + \sin^2(u)\sin^2(v) + \cos^2(u)\sin^2(v)) = \\
&\qquad = -2r^2\sin(v)(\cos^2(u) + \sin^2(u)) = -2r^2\sin(v)
\end{aligned}$$

Integralen som ska beräknas blir

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2r^2 \sin(v) dv du dr = 4\pi \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin(v) dv = 4\pi \frac{1}{3} 1 = \frac{4\pi}{3}$$

c) En beräkning av divergensen ger

$$\nabla \cdot B = 2x_1x_2 + 0 - 2x_1x_2 = 0.$$

Vi sluter området enligt b)-uppgiften och kallar enhetscirkeln i $x_1 - x_2$-planet för $\tilde{S}$. Gauss' sats ger att

$$\int_S B \cdot nds = -\int_{\tilde{S}} B \cdot nds = 0,$$

där sista likheten kommer av att $B \cdot n = (x_1^2 x_2, x_1 x_3, -2x_1 x_2 x_3) \cdot (0,0,-1) = 2x_1 x_2 x_3 = 0$ på $\tilde{S}$ eftersom $x_3 = 0$ på den ytan.

5 a) Fältet är konservativt om $\nabla \times u = 0$. Vi får

$$\nabla \times u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 + 2x_1 & x_1 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Integrering av komponent u_i med avseende på x_i ger

$$\begin{aligned} \int u_1 dx_1 &= x_1^2 + x_1 x_2 + C_1(x_2, x_3), \\ \int u_2 dx_2 &= x_1 x_2 + C_2(x_1, x_3), \\ \int u_3 dx_3 &= \frac{1}{3} x_3^3 + C_3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Potentialen kan därför väljas till $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{3} x_3^3$.
c) Om man lyckats bestämma en potential i b) fås

$$\int_\Gamma u \cdot ds = \varphi(3,1,1) - \varphi(1,1,0) = 9 + 3 + \frac{1}{3} - (1+1+0) = 10\frac{1}{3}.$$

Om man inte lyckats bestämma potential, men utnyttjar att integralen är oberoende av vägen (eftersom fältet är konservativt) kan vi integrera längs kurvan $s(t) = (1+2t, 1, t)$:

$$\int_\Gamma u \cdot ds = \int_0^1 (3+4t, 1+2t, t^2) \cdot (2,0,1) dt = \int_0^1 6 + 8t + t^2 dt = 10\frac{1}{3}.$$

Direkträkning längs den givna Γ ger integralen

$$\int_\Gamma u \cdot ds = \int_0^1 5\pi \sin(\pi t) + 2\pi \cos(\pi t) + 2\pi \sin^2(\pi t) - 2\pi \cos(\pi t) \sin(\pi t) - \pi + t^2 dt.$$

Första termen ger

$$\int_0^1 5\pi \sin(\pi t) dt = 10,$$

andra

$$\int_0^1 2\pi \cos(\pi t) dt = 0,$$

fjärde

$$-\int_0^1 2\pi\cos(\pi t)\sin(\pi t)dt = [\cos^2(\pi t)]_0^1 = 0,$$

och sjätte

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Tredje termen är lite klurigare, men genom partialintegrering och trig-ettan fås

$$\int_0^1 2\pi\sin^2(\pi t)dt = 2\pi\int_0^1 \cos^2(\pi t)dt = \int_0^1 2\pi dt - \int_0^1 2\pi\sin^2(\pi t)dt,$$

så integralen blir

$$\int_0^1 2\pi\sin^2(\pi t)dt = \pi,$$

vilket tas ut av den femte termen.

/Rickard