Tentamen Analys och linjär algebra, del C TMV035 K1/Kf1/Bt1
030313 V em

Provet består av fem uppgifter som totalt kan ge 50 poäng, för godkänt krävs 25p.
Betygsgränser: **3**: 25-33, **4**: 34-42, **5**: 43-50.
Hjälpmedel: Inga.
Dina lösningar skall vara välskrivna och lätta att följa.
Telefonvakt: Tobias Gebäck 0740-459022.

1. Bestäm lösningen $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ för $t > 0$ till problemet:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) \end{cases},$$

med begynnelsedata $u(0) = (1, 2)$. (10p)

2 a) Definiera/beskriv vad som menas med nivåkurva Γ_c till en funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. (4p)
b) Visa att gradienten ∇f är ortogonal mot Γ_c. (4p)

3 a) Beskriv hur vi m.h.a. dator numeriskt kan beräkna en approximation till en dubbelintegral $\int\int_\Omega f(x_1, x_2)dx_1 dx_2$. (6p)
b) Vad kan vi göra för att förbättra approximationen? (2p)
c) Felet hos vår numeriska approximation beror på hur stor integrandens gradient, ∇f, är. När blir felet minst, om funktionen har stor gradient eller liten? Motivera ditt svar! (2p)

4. Betrakta ytan S som ges av parametriseringen
$s(u, v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), 2\cos(v))$, där $u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2]$.
a) Beskriv S geometriskt. (2p)
b) Beräkna volymen av området mellan S och planet $z = 0$. (6p)
c) Beräkna flödesintegralen

$$\int_S B \cdot n ds,$$

då $B(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_2, x_1 x_3, -2x_1 x_2 x_3)$ och normalen n har positiv x_3-komponent. (4p)

5 a) Visa att fältet $u(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_1, x_1, x_3^2)$ är konservativt i $\mathbf{R}^3$. (4p)
b) Bestäm en potential $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ så att $u = \nabla\varphi$. (2p)
c) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma u \cdot ds,$$

där $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (2 - \cos(\pi t), 1 + \sin(\pi t), t), t \in [0, 1]\}$. (4p)