95 Egenvärdesproblemet

Vår stabilitetsundersökning bygger på det linjäriserade problemet:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

där $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ är kolonnvektorer och A är en matris av typ $n \times n$ och B av typ $n \times m$. Vi antar att $Bu(t) \equiv 0$.

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Detta är ett system av n stycken kopplade linjära differentialekvationer. Kom ihåg två fall som vi behandlat tidigare.

(a) En enda ekvation $x'(t) = x(t)$ med begynnelsevillkor $x(0) = 1$. Approximationen $X(t_i) = X(t_{i-1}) + hX(t_{i-1})$ konvergerar mot en unik lösning $x(t)$ som vi kallar $\exp(t)$:

$$x(t) = \exp(t).$$

(b) Två ekvationer $\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) \end{cases}$ med begynnelsevillkor $\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 1, \end{cases}$, dvs

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Approximationen $X(t_i) = X(t_{i-1}) + hAX(t_{i-1})$ konvergerar mot en unik lösning $x(t)$ som vi kallar $\sin(t), \cos(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Vi betraktar nu ett allmänt system av linjära ordinära differentialekvationer (ODE) med konstanta koefficienter:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

där $x(t)$ och x_0 är av typ $n \times 1$, A av typ $n \times n$, och där A ej beror på t.

Approximationen $X(t_i) = X(t_{i-1}) + hAX(t_{n-1})$ konvergerar mot en unik lösning $x(t)$, som vi inte har något namn på, men vi ska se att den kan uttryckas med hjälp av exp, sin och cos.

Vi gör följande ansats:

$$x(t) = e^{\lambda t} g = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}.$$

där λ är ett tal och g en vektor. Insättning i differentialekvationen ger:

$$\lambda e^{\lambda t} g = e^{\lambda t} A g$$

$$Ag = \lambda g \quad (\text{ty } e^{\lambda t} \neq 0)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

Detta leder till **egenvärdesproblemet**:

Antag att A att är en kvadratisk matris av typ $n \times n$. Finn ett tal λ och vektor $g \neq 0$ sådana att

$$Ag = \lambda g.$$

Obs: nollvektorn $g = 0$ satisfierar visserligen ekvationen, men det ger bara trivial lösning $x(t) = e^{\lambda t} g = 0$ och är därför ointressant.

Sådana λ, g kallas *egenvärde* med tillhörande *egenvektor* till A (kort: e-värde, e-vektor).

Egenvektorekvationen kan skrivas:

$$(A - \lambda I)g = 0 \qquad \left(\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är ett homogent linjärt ekvationssystem. Vi kommer ihåg att två fall kan inträffa.

- Fall 1: $\det(A - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow$ unik lösning $g = (A - \lambda I)^{-1} 0 = 0$, ingen e-vektor,
- Fall 2: $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$ icke-trivial lösning $g \neq 0$ (ej unik).

Ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ är en polynomekvation $p(\lambda) = 0$ av grad n. Algebrans fundamentalsats ger n st rötter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Vi noterar att

- λ_k är reella eller komplexa tal,
- λ_k kan vara multipelrötter, de räknas då upp så många gånger som multipliciteten anger.

För varje λ_k kan vi sedan lösa $Ag = \lambda_k g$ och hitta en egenvektor $g_k \neq 0$.

Vi har då n st e-värden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ med tillhörande e-vektorer $g_1, \dots, g_n$.

De satisfierar $Ag_k = \lambda_k g_k, \ k = 1, \dots, n$.

Vi definierar två nya matriser.

Egenvärdesmatrisen:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{(unik)}.$$

En egenvektormatris:

$$P = [g_1, \dots, g_n] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{(ej unik)}.$$

De satisfierar

$$AP = A[g_1, \ldots, g_n] = [Ag_1, \ldots, Ag_n] = [\lambda_1 g_1, \ldots, \lambda_n g_n] = PD,$$

dvs

$$\boxed{\text{AP=PD.}}$$

Om $g_1, \ldots, g_n$ äro *linjärt oberoende* så är P *inverterbar* och

$$P^{-1}AP = D, \quad A = PDP^{-1}.$$

Vi säger då att A är *diagonaliserbar*.

Vi återvänder nu till vårt system av ordinära differentialekvationer $x'(t) = Ax(t)$. Vi har hittat n stycken lösningar $x_k(t) = e^{\lambda_k t} g_k$. Varje linjär kombination

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} g_k = c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} g_n \quad (c_k \text{ är godtyckliga tal})$$

löser också $x' = Ax$. Om $g_1, \ldots, g_n$ är linjärt oberoende fås *alla lösningar* på detta vis, ty då är $g_1, \ldots, g_n$ en *bas* för $\mathbf{R}^n$ och lösningen kan skrivas som en linjär kombination av denna bas:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) g_k \quad (y_k(t) \text{ är komponenterna för } x(t) \text{ i den nya basen}).$$

Insättning i $x' = Ax$ ger

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_k y_k'(t) g_k = A \sum_k y_k(t) g_k = \sum_k y_k(t) \underbrace{Ag_k}_{=\lambda_k g_k} = \sum_k \lambda_k y_k(t) g_k \\
&\Rightarrow \sum_k \big(y_k'(t) - \lambda_k y_k(t)\big) g_k = 0 \\
&\Rightarrow y_k'(t) - \lambda_k y_k(t) = 0 \quad (\text{ty } g_1, \ldots, g_n \text{ är linjärt oberoende}) \\
&\Rightarrow x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} g_k.
\end{aligned}$$

Koefficienterna bestäms av begynnelsevillkoret $x_0 = x(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k$:

$$\Rightarrow c_k \text{ är kompononenterna för } x_0 \text{ i e-vektorbasen}$$

Denna koordinattransformation kan också skrivas på matrisform

$$x(t) = Py(t), \quad x_0 = Pc.$$

Exempel 95.1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (symmetrisk!)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lös $(A - \lambda I)g = 0$.

1) $\lambda_1 = 1$, ansats $g_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow b$ fri, $b = s,\ a = b = s \Rightarrow g_1 = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, s godt tal.

2) $\lambda_1 = -1$, ansats $g_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow b = t, a = -b = -t \Rightarrow g_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

obs: g_1 och g_2 är *ortogonala*, normalisera så fås *ON-bas*: $s = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ blir då en ortogonal matris:

$$P^{\mathrm{T}} P = I, \quad P^{-1} = P^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

dvs $AP = PD$. Dessutom:

$$P^{\mathrm{T}} AP = D, \quad A = PDP^{\mathrm{T}}.$$

Ekvationen $\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ har lösningen

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2} c_k e^{\lambda_k t} g_k = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

begynnelsevillkoret ger $x_0 = x(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Multiplicera skalärt med $g_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$:

$$(x_0, g_1) = c_1 \underbrace{(g_1, g_1)}_{=1} + c_2 \underbrace{(g_1, g_2)}_{=0} = c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = (x_0, g_1) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \frac{x_{01} + x_{02}}{\sqrt{2}}$$

På samma vis:

$$c_2 = (x_0, g_2) = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \frac{-x_{01} + x_{02}}{\sqrt{2}}$$

Alltså:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{2}(x_{01} + x_{02})e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}(-x_{01} + x_{02})e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{01}\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) + x_{02} \cdot \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ x_{01}\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + x_{02} \cdot \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x(t) = x_{01} \begin{bmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{bmatrix} + x_{02} \begin{bmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{bmatrix}$$

Stabilitet?

$$\begin{aligned} &x(t) = \underbrace{c_1 e^t}_{\text{växer}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \underbrace{c_2 e^{-t}}_{\text{avtar}} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \text{växer om } c_1 \neq 0 \\ &\Rightarrow \text{instabilt system} \end{aligned}$$

Exempel 95.2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ (ej symmetrisk)

$$\begin{aligned} &\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \\ &\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i \quad \text{(komplexa!)} \\ &D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1) $\lambda_1 = 2i$

$$\begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underset{\swarrow}{\boxed{2i}} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

2) $\lambda_2 = -2i$

$$\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

$(g_1, g_2) = \bar{g}_2^{\mathrm{T}} g_1 = [1 \quad 2i] \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$, ej ortogonala.

$$D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -2i \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = -4i \neq 0, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4i} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4i} \end{bmatrix}$$

$$AP = PD, \quad A = PDP^{-1}, P^{-1}AP = D$$

Lösningen till $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ är

$$x(t) = c_1 e^{2it} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} + c_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Första komponenten är

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it} \\ &= c_1(\cos(2t) + i\sin(2t)) \\ &+ c_2(\cos(2t) - i\sin(2t)) \\ &= (c_1 + c_2)\cos(2t) + i(c_1 - c_2)\sin(2t) \\ &= d_1\cos(2t) + d_1\sin(2t), \end{aligned}$$

dvs lösning är en linjär kombination av $\cos(2t)$ och $\sin(2t)$.

Vi har använt formeln (Ch 33)

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos(t) + i\sin(t) \\ e^{-it} &= \cos(t) + i\sin(-t) = \cos(t) - i\sin(t) \end{aligned}$$

Stabilitet?

$$x(t) = c_1 \underbrace{e^{2it}}_{\text{växer ej}} g_1 + c_2 \underbrace{e^{-2it}}_{\text{växer ej}} g_2$$

ty $|e^{\pm 2it}| = 1 \Rightarrow$ stabilt system.

Exempel 95.3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm \sqrt{3}i$$
$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i, \ \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} g_2 = c_1 e^t e^{\sqrt{3}it} g_1 + c_2 e^t e^{-\sqrt{3}it} g_2$$

Här är $e^t e^{\pm\sqrt{3}it} = e^t\big(\cos(\sqrt{3}t) \pm i\sin(\sqrt{3}t)\big)$. Detta är en svängning med växande amplitud. Instabilt system.

Vi betraktar nu det allmänna systemet: $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ med lösningen

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} g_k$$

Vi antar att $g_1, \dots, g_n$ är linjärt oberoende. Då är c_k komponenterna av x_0 i e-vektorbasen $g_1, \dots, g_n$.

Vi skriver $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$. Två fall:

1) $\lambda_k = \alpha_k$ reellt egenvärde
   $e^{\lambda_k t} = e^{\alpha_k t}$ är *konstant, växande* respektive *avtagande* beroende på om $\alpha_k = 0$, $\alpha_k > 0$ eller $\alpha_k < 0$.
2) $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$ komplext egenvärde
   $e^{\lambda_k t} = e^{\alpha_k t} e^{i\omega_k t} = e^{\alpha_k t}(\cos(\omega_k t) + i\sin(\omega_k t))$ är en svängning med *konstant, växande* respektive *avtagande* amplitud beroende på om realdelen $\alpha_k = 0$, $\alpha_k > 0$ eller $\alpha_k < 0$.

Vi säger att systemet $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ är *stabilt* om $x(t)$ är *liten* för *alla* val av små begynnelsestörningar x_0 (dvs c_k).

Systemet är *instabilt* annars, dvs om $x(t)$ blir stor för *något* val av liten begynnelsestörning x_0, dvs om $x(t)$ växer.

Dessutom: systemet är *asymptotiskt stabilt* om $x(t) \to 0$ då $t \to \infty$.

Systemet instabilt $\Leftrightarrow$ någon $\alpha_k = \mathrm{Re}\lambda_k > 0$
Asymptotiskt stabilt $\Leftrightarrow$ alla $\alpha_k = \mathrm{Re}\lambda_k < 0$

Svårare att ge precist villkor för stabilitet. Läs “Dyn. system” sid 1–7.

I MATLAB:

```
>> eig(A)
```

ger egenvärderna

```
>> [P,D]=eig(A)
```

ger både e-värdesmatrisen D och en e-vektormatris P.

Övningar

95.1. Lös egenvärdesproblemet för matrisen A i följande fall. Bestäm en ortogonal egenvektormatris om möjligt. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ Avgör systemets stabilitet. Räkna först för hand. Använd sedan MATLAB.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Svar

95.1.

(a) $D = \text{diag}(-2, 5) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ej ortogonal), instabilt.

(b) $D = \text{diag}(5, 10) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (ortogonal), instabilt.

(c) $D = \text{diag}(0, 9, 9) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (ej ortogonal), eller $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (ortogonal), instabilt.

`2003-03-11 /stig`