Matematik Chalmers

Övningstentamen 2 i TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 1999

Telefon: Stig Larsson, 772 35 43
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. (Motivera och förklara hur du resonerar. Jag kommer att betygsätta hur välskrivna dina lösningar är. Enbart "rätt svar" är inte tillräckligt, välformulerade lösningar som är trevliga att läsa ger mer poäng. Lämna inte in kladdpapper.)

1. (a) För vilka x är $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ definierad? Beräkna $f(x)$.
(b) Visa att $|f(x)| \leq \frac{2}{3}$ för $|x| \leq \frac{1}{2}$.

2. (a) Beräkna Taylorpolynomet av grad ≤ 3 med baspunkt 0 för funktionen $\cos(x)$. Beräkna resttermen $R_3(x)$.
(b) Visa att $R_3(x) = g(x)x^4$ med $|g(x)| \leq \frac{1}{24}$.
(c) Använd detta för att beräkna en approximation till $\cos(0.1)$. Hur stort är felet?
(d) Använd (a) och (b) för att beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}.$$

3. (a) Lös

$$\begin{aligned} u' &= u^3, \quad x > 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Rita grafen till $u(x)$.
(b) Hur beräknar man u numeriskt?

4. (a) Vilket begynnelsevärdesproblem används för att konstruera $u(x) = \sin(x)$?
(b) Visa utgående från detta att $u'(x)^2 + u(x)^2 = 1$. Vilken trigonometrisk formel är detta?
(b) Beskriv hur man löser begynnelsevärdesproblemet numeriskt.

5. (a) Formulera Newtons metod för system av ekvationer $f(v) = 0$, där $v \in \mathbf{R^d}$ och $f : \mathbf{R^d} \to \mathbf{R^d}$.
(b) Rörelseekvationen för pendeln är $\ddot{u} + \sin(u) = 0$. Skriv denna som ett system av ekvationer av första ordningen: $\dot{v} = F(v)$, där $v \in \mathbf{R^2}$ och $F : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$. Lös ekvationssystemet $F(v) = 0$.
(c) Beräkna Jacobimatrisen $DF(v)$. Skriv ned det första steget i Newtons metod för systemet $F(v) = 0$ med startvektorn $v^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Korta svar.

1. (a) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ för $-1 < x < 1$.
(b) $|f(x)| = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \leq \frac{4}{3}x \leq \frac{2}{3}$ för $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, ty $1 - t^2 \geq \frac{3}{4}$ för $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Samma resultat fås för $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$, ty $f(-x) = -f(x)$.

2. (a) $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_3(x)$, $R_3(x) = \cos(\hat{x})\dfrac{x^4}{24}$, där $\hat{x}$ ligger mellan 0 och x.
(b) $R_3(x) = g(x)x^4$ med $|g(x)| = \frac{1}{24}|\cos(\hat{x})| \leq \frac{1}{24}$.
(c) $\cos(0.1) \approx 1 - \frac{1}{2}0.1^2 = 0.995$ med felet $|R_3(0.01)| \leq \frac{1}{24}0.1^4 < 10^{-5}$.
(d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+g(x)x^4)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2 - g(x)x^4}{x} = \lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{2}x - g(x)x^3) = 0$$

Intressantare gränsvärde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+g(x)x^4)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-g(x)x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{2}-g(x)x^2)=\tfrac{1}{2}$$

3. (a) $u(x)=\dfrac{u_0}{\sqrt{1-2xu_0^2}}$ för $0\le x<1/(2u_0^2)$.

(b) Framåt Euler: $U(0)=u_0$, $U(x_i)=U(x_{i-1})+h_iU(x_{i-1})^3$.

4. (a) $u''+u=0$, $u(0)=0$, $u'(0)=1$. (b) Se kap 30. Detta är "trigonometriska ettan": $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

(c) Man skriver det som ett system av första ordningen: $v_1=u$, $v_2=u'$ och

$$v'=Av,\ v(0)=v_0;\quad A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad v_0=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Sedan använder man en numerisk metod, t ex, framåt Euler:

$$\begin{aligned}&U(0)=v_0,\\&U(t_i)=U(t_{i-1})+h_iAU(t_{i-1})=(I+h_iA)U(t_{i-1}).\end{aligned}$$

5. (a)

för $k=0,1,2,\ldots$
evaluera $A=Df(v^{(k)})$ och $b=-f(v^{(k)})$
lös ekvationssystemet $Ah=b$
uppdatera $v^{(k+1)}=v^{(k)}+h$
end

(b)

$$\begin{bmatrix}\dot v_1\\\dot v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_2\\-\sin(v_1)\end{bmatrix},\quad \dot v=F(v),\quad F(v)=\begin{bmatrix}F_1(v)\\F_2(v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_2\\-\sin(v_1)\end{bmatrix}.$$

$F(v)=0$ ger $v_2=0$, $v_1=n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(c)

$$DF(v)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1(v)}{\partial v_1}&\frac{\partial F_1(v)}{\partial v_2}\\\frac{\partial F_2(v)}{\partial v_1}&\frac{\partial F_2(v)}{\partial v_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-\cos(v_1)&0\end{bmatrix}$$

Första steget i Newtons metod:

evaluera $A=DF(0,1)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ och $b=-F(0,1)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

lös ekvationssystemet $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$, $h=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

uppdatera $v^{(1)}=v^{(0)}+h=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

mitt i prick!

/stig