Matematik Chalmers

Övningstentamen 1 i TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 1999

Telefon: Stig Larsson, 772 35 43
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. (Motivera och förklara hur du resonerar. Jag kommer att betygsätta hur välskrivna dina lösningar är. Enbart "rätt svar" är inte tillräckligt, välformulerade lösningar som är trevliga att läsa ger mer poäng. Lämna inte in kladdpapper.)

1. (a) Beräkna $\int_0^x (t^3+t)e^{-t^2}\,dt$.

(b) Beräkna $\int_{-1}^1 \sin(t)e^{-t^2}\,dt$.

(c) Låt $f(x)=\int_0^x \sin(t)e^{-t^2}\,dt$. Bestäm en Lipschitzkonstant för f.

2. (a) Låt $f(x)=\arctan(x)$. Beräkna dess Taylorpolynom av grad ≤ 2 med baspunkt 0. Beräkna resttermen $R_2(x)$.
(b) Visa att $|R_2(x)|\leq |x|^3$ för $-1\leq x\leq 1$.
(c) Använd detta för att beräkna en approximation till $\arctan(0.1)$. Hur stort är felet?

3. Lös

$$\begin{aligned} &u''+4u'+8u=0, \quad t>0,\\ &u(0)=0,\ u'(0)=u_1. \end{aligned}$$

Rita grafen till $u(t)$. Visa att $|u(t)|\leq \frac{1}{2}|u_1|$ för $t\geq 0$.
Skriv begynnelsevärdesproblemet som ett system av ekvationer av första ordningen.
Ange en algoritm för numerisk beräkning av lösningen.

4. Formulera integralkalkylens fundamentalsats. Ange de olika stegen i beviset (utan detaljer).

5. Beskriv ditt eget matlabprogram för numerisk beräkning av $\log(x)$. Ge en uppskattning av felet i denna beräkning.

Svar.

1. (a)

$$\int_0^x (t^3+t)e^{-t^2}\,dt = \left\{\begin{matrix} s=t^2 \\ ds=2t\,dt \end{matrix}\right\} = \int_0^{x^2}(s+1)e^{-s}\,ds = \{\text{partiell integration}\} = -(\tfrac{1}{2}x^2+1)e^{-x^2}+1$$

(b) 0, ty integranden är en udda funktion och integrationsintervallet är symmetriskt.
(c) $L_f\leq 1$

2. (a) $\arctan(x)=x+R_2(x)$, $R_2(x)=-2\dfrac{1-3\hat{x}^2}{(1+\hat{x}^2)^3}\dfrac{x^3}{6}$, där $\hat{x}$ ligger mellan 0 och x.

(b) $|R_2(x)|=\frac{1}{3}\dfrac{|1-3\hat{x}^2|}{(1+\hat{x}^2)^3}|x|^3\leq \frac{2}{3}|x|^3$ för $-1\leq x\leq 1$, ty $|1-3\hat{x}^2|\leq 2$ och $(1+\hat{x}^2)^3\geq 1$.

(c) $\arctan(0.1)\approx 0.1$ med felet $|R_2(0.1)|\leq \frac{2}{3}0.1^3<10^{-3}$.
3. $u(t)=\frac{1}{2}u_1e^{-2t}\sin(2t)$. $|u(t)|=\frac{1}{2}|u_1||e^{-2t}||\sin(2t)|\leq\frac{1}{2}|u_1|$ för $t\geq 0$.
Sätt $x_1=u$, $x_2=u'$. Då fås

$$x'=Ax,\ x(0)=x_0;\quad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -4\end{bmatrix},\quad x_0=\begin{bmatrix}0\\ u_1\end{bmatrix}.$$

Framåt Euler:

$$\begin{aligned} &U(0)=x_0,\\ &U(t_i)=U(t_{i-1})+h_iAU(t_{i-1})=(I+h_iA)U(t_{i-1}). \end{aligned}$$

/stig